

第2章

基礎方程式系の定式化

CReSS の支配方程式系は、運動方程式（地球の回転を考慮した ナビエ・ストークス方程式）、熱力学方程式、圧縮系の連続方程式、水蒸気混合比の式、雲・降水粒子の混合比の式、および、雲・降水粒子の数密度の式で記述される。これらの式に様々な物理過程を定式化したものと境界値の定式化が加わり、モデルが構成される。本章では、このうち基本方程式系の定式化についてまとめる。

CReSS は地形に沿う座標系を取ることで、地形の効果を取り入れることができる。この座標系を座標変換することにより、矩形の格子で計算を実行する。ここではモデルを理解しやすくするために、はじめに地形を含まない場合を述べ、次に地形を考慮するための座標変換とその場合の方程式系についてまとめる。

さらに、*CReSS* では、地球の曲率の効果や地図投影によるゆがみの効果も取り入れることができるので、その場合の方程式系と地図投影法についてもまとめる。

なお、ここに現れる変数は、SI 単位系である。他の単位系として読み替えてもほとんど支障ないが、数字で表わされている係数が変わる。

2.1 基本方程式系 — 地形を含まない場合

モデルの独立変数は空間の座標、 x, y, z と時間 t である。これらの関数として定義される従属変数は、**CReSS** で採用している準圧縮性の方程式系では、速度の水平2成分 u, v と鉛直成分 w 、基準状態からの温位偏差 θ' 、基準状態からの気圧偏差 p' 、水蒸気混合比 q_v 、水物質の混合比 q_x 、および、水物質の数密度 N_x である。ここで q_x, N_x は、水蒸気以外の水物質で、雲・降水過程をどのように表現するかでその変数の数が決まり、それに応じて時間発展方程式系の数が変わる。ここで、これらの従属変数のうち、圧力、温位、水蒸気、また、水蒸気と水物質を考慮した湿潤大気密度 ρ については、以下の静力学平衡、

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\bar{\rho}g \quad (2.1)$$

を満たす基準状態と、それからの偏差の関係が、

$$p = \bar{p} + p' \quad (2.2)$$

$$\theta = \bar{\theta} + \theta' \quad (2.3)$$

$$q_v = \bar{q}_v + q'_v \quad (2.4)$$

$$\rho = \bar{\rho} + \rho' \quad (2.5)$$

のように与えられる。また、密度は状態方程式、

$$\rho = \frac{p}{R_d T} \left(1 - \frac{q_v}{\epsilon + q_v} \right) \left(1 + q_v + \sum q_x \right) \quad (2.6)$$

により診断的に求められる。ここで、 g は重力加速度、 T は温度、 ϵ は水蒸気と乾燥空気の分子量の比、 R_d は乾燥空気の気体定数である。

準圧縮系の基礎方程式では、密度以外の従属変数はすべて時間発展方程式系で表現される。**CReSS** においては地形に沿う座標系が採用されているが、ここではまず、基礎方程式系を理解しやすくするために地形を含まない場合の時間発展方程式系を与える。

運動方程式

$$\frac{\partial \bar{\rho}u}{\partial t} = -\bar{\rho} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial p'}{\partial x} + \bar{\rho} (f_s v - f_c w) + \text{Turb.}u \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}v}{\partial t} = -\bar{\rho} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{\partial p'}{\partial y} - f_s \bar{\rho}u + \text{Turb.}v \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}w}{\partial t} = -\bar{\rho} \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\partial p'}{\partial z} - \bar{\rho} \text{Buoy.}w + f_c u + \text{Turb.}w \quad (2.9)$$

ここで、 f_s, f_c はコリオリ係数、 $\text{Buoy.}w$ は浮力項である。

気圧偏差の方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial t} = & - \left(u \frac{\partial p'}{\partial x} + v \frac{\partial p'}{\partial y} + w \frac{\partial p'}{\partial z} \right) + \bar{\rho} g w \\ & - \bar{\rho} c_s^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \bar{\rho} c_s^2 \left(\frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} - \frac{1}{Q} \frac{dQ}{dt} \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

ここで、 c_s は空気中の音速、 $Q = 1 + 0.61q_v + \sum q_x$ である。

温位偏差の方程式

$$\frac{\partial \bar{\rho} \theta'}{\partial t} = -\bar{\rho} \left(u \frac{\partial \theta'}{\partial x} + v \frac{\partial \theta'}{\partial y} + w \frac{\partial \theta'}{\partial z} \right) - \bar{\rho} w \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} + \text{Turb.} \theta + \bar{\rho} \text{Src.} \theta \quad (2.11)$$

水蒸気および水物質の混合比の方程式

$$\frac{\partial \bar{\rho} q_v}{\partial t} = -\bar{\rho} \left(u \frac{\partial q_v}{\partial x} + v \frac{\partial q_v}{\partial y} + w \frac{\partial q_v}{\partial z} \right) + \text{Turb.} q_v + \bar{\rho} \text{Src.} q_v \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} q_x}{\partial t} = -\bar{\rho} \left(u \frac{\partial q_x}{\partial x} + v \frac{\partial q_x}{\partial y} + w \frac{\partial q_x}{\partial z} \right) + \text{Turb.} q_x + \bar{\rho} \text{Src.} q_x + \bar{\rho} \text{Fall.} q_x \quad (2.13)$$

水物質の数密度の方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial t} = & -\bar{\rho} \left[u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{N_x}{\bar{\rho}} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{N_x}{\bar{\rho}} \right) + w \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{N_x}{\bar{\rho}} \right) \right] \\ & + \text{Turb.} \frac{N_x}{\bar{\rho}} + \bar{\rho} \text{Src.} \frac{N_x}{\bar{\rho}} + \bar{\rho} \text{Fall.} \frac{N_x}{\bar{\rho}} \end{aligned} \quad (2.14)$$

これ以上の変数についての詳細は、節 2.2 で改めて述べる。また、気圧の方程式以外に現れるサブグリッドスケールの拡散項 $\text{Turb.} \phi$ については、第 3 章「サブグリッドスケールの拡散」で、温位と水物質の方程式に現れる生成・消滅項 $\text{Src.} \phi$ と落下項 $\text{Fall.} \phi$ については、第 4 章「雲・降水の物理過程」で述べる。

2.2 基本方程式系 — 地形を含む場合

2.2.1 一般曲線座標

CReSS は地形を含むために、地形に沿う座標系を採用している。デカルト座標系のベクトルが正規直交基底で表現されるのとは異なり、この座標系における基底は必ずしも直交基底にはならない。これは曲線座標系の線形代数学の範疇にはいるもので、ここではその基礎知識をまとめる。

反変成分と共変成分

正規でも直交でもない一般の 1 次独立な基底 ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) を導入すると、任意のベクトル \mathbf{A} は、その 1 次結合として、

$$\mathbf{A} = A^1 \mathbf{e}_1 + A^2 \mathbf{e}_2 + A^3 \mathbf{e}_3 \quad (2.15)$$

で表される。一方で、この規定の逆基底 ($\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2, \mathbf{f}^3$) を、

$$\mathbf{f}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_j^i \quad (2.16)$$

と定義すると、

$$\mathbf{f}^i \cdot \mathbf{A} = A^i \quad (2.17)$$

のようにその成分が得られる。ここで、クロネッカーのデルタを、次のように定義している。

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2.18)$$

正規直交基底の場合には座標成分は基底ベクトルと任意のベクトルのスカラー積で与えられるが、一般の基底ではその成分を求めるためには、逆基底ベクトルとのスカラー積を取らなければならない。このようなもとの基底に関する座標成分を「反変成分」といい、上付き添字で表す。一方で、逆基底に関する座標成分を下付き添字で表し、それを「共変成分」とよぶ。

さて、任意のベクトル \mathbf{B} を逆基底ベクトルで表すと、

$$\mathbf{B} = B_1 \mathbf{f}^1 + B_2 \mathbf{f}^2 + B_3 \mathbf{f}^3 \quad (2.19)$$

のようになり、これらのベクトルの内積を取ると、次のようになる。

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^i B_i \quad (2.20)$$

このように、共変成分と反変成分を同時に使うと、スカラー積は対応する座標の成分の積の和という簡単な形に表される。正規直交基底の場合、逆基底がもとの基底と同じになるので、反変成分と共変成分の区別がなくなり、

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^i B^i \quad (2.21)$$

のように表すことができる。また、任意のベクトル \mathbf{A} と、基底 ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) との内積は、ベクトル \mathbf{A} の基底 ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) に関する共変成分を与える。

$$A_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i \quad (2.22)$$

次に、基底 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ について、9個の内積、

$$G_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \quad (2.23)$$

を作ることができる。この行列 G_{ij} を「計量行列」という。これはまた2次のテンソルであることが示され、これを計量テンソルともいう。これを用いて、

$$A^i = G_{ji} A_j \quad (2.24)$$

のように、共変成分と反変成分の関係が表される。

曲線座標

直交直線座標 (x, y, z) の関数として、空間のある領域で定義される3つの関数 $F^i(x, y, z)$ を考える。これらは (x, y, z) について何度でも微分可能とする。

$$\xi = F^1(x, y, z) \quad (2.25)$$

$$\eta = F^2(x, y, z) \quad (2.26)$$

$$\zeta = F^3(x, y, z) \quad (2.27)$$

とおいたとき、領域内の各点 $P(x, y, z)$ に対して (ξ, η, ζ) が対応する。この対応が1対1のとき、領域内に曲線座標 (ξ, η, ζ) が設定されたという。さらに、次のことが成り立っていると仮定する。

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.28)$$

さて、直交座標系について、ベクトル $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

を定義する。ここで、ベクトル $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ を曲線座標 (ξ, η, ζ) の「基底」または「基本ベクトル」という。これを用いて、任意のベクトル場 \mathbf{A} は、その1次結合として、

$$\mathbf{A} = A^1 \mathbf{e}_1 + A^2 \mathbf{e}_2 + A^3 \mathbf{e}_3 \quad (2.30)$$

のように表される。このとき A^i をベクトル場 \mathbf{A} の曲線座標 (ξ, η, ζ) に関する「反変成分」という。これについての共変成分は(2.22)で与えられる。同様に、基底 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ について、9個の内積、

$$G_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \quad (2.31)$$

を作ることができる。行列 G_{ij} を曲線座標 (ξ, η, ζ) の「計量行列」という。共変成分と反変成分の関係は同様に(2.24)で与えられる。

2.2.2 地形に沿う座標系

先に述べたように多くの気象モデルでは地形を考慮するために、地形に沿った座標系を採用している。そのような座標系は、曲線座標系の特別な関係に基づいて位置づけられる。

他の気象モデルなどと同様に、*CReSS* でも次のような座標系を用いている。

$$\xi = x \quad (2.32)$$

$$\eta = y \quad (2.33)$$

$$\zeta = \zeta(x, y, z) \quad (2.34)$$

この場合、デカルト座標系の速度ベクトル成分 (u, v, w) は、地形に沿う座標系の速度ベクトル成分（反変成分） (U, V, W) を用いて(2.30)と同様に、次のように表すことができる（本来、 (U, V, W) は反変成分であるので、 (u^1, u^2, u^3) のように上付き添字で表現するべきものであるが、簡単のためにこのように表記する）。

$$u = U \frac{\partial x}{\partial \xi} + V \frac{\partial x}{\partial \eta} + W \frac{\partial x}{\partial \zeta} \quad (2.35)$$

$$v = U \frac{\partial y}{\partial \xi} + V \frac{\partial y}{\partial \eta} + W \frac{\partial y}{\partial \zeta} \quad (2.36)$$

$$w = U \frac{\partial z}{\partial \xi} + V \frac{\partial z}{\partial \eta} + W \frac{\partial z}{\partial \zeta} \quad (2.37)$$

今、条件(2.28)が成り立っていると仮定しているので、(2.35)~(2.37)を (U, V, W) について解いて、速度ベクトル表現の逆変換を作ることができる。

$$UG^{\frac{1}{2}} = uJ_{\eta\zeta}^{yz} + vJ_{\eta\zeta}^{zx} + wJ_{\eta\zeta}^{xy} \quad (2.38)$$

$$VG^{\frac{1}{2}} = uJ_{\zeta\xi}^{yz} + vJ_{\zeta\xi}^{zx} + wJ_{\zeta\xi}^{xy} \quad (2.39)$$

$$WG^{\frac{1}{2}} = uJ_{\xi\eta}^{yz} + vJ_{\xi\eta}^{zx} + wJ_{\xi\eta}^{xy} \quad (2.40)$$

ここで、 J はヤコビアンで、例えば、

$$J_{\eta\zeta}^{yz} \equiv \frac{\partial(y, z)}{\partial(\eta, \zeta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} \quad (2.41)$$

のように、また、 $G^{\frac{1}{2}}$ は (ξ, η, ζ) と (x, y, z) の間の座標変換のヤコビアンで、次のように定義される。

$$G^{\frac{1}{2}} \equiv \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} \quad (2.42)$$

さて、(2.32)~(2.34) で定義される地形に沿う座標系の場合、(2.38)~(2.40) に現れるヤコビアンは、

$$\begin{aligned} J_{\eta\zeta}^{yz} &= \frac{\partial z}{\partial \zeta}, & J_{\eta\zeta}^{zx} &= 0, & J_{\eta\zeta}^{xy} &= 0, \\ J_{\zeta\xi}^{yz} &= 0, & J_{\zeta\xi}^{zx} &= \frac{\partial z}{\partial \zeta}, & J_{\zeta\xi}^{xy} &= 0, \\ J_{\xi\eta}^{yz} &= -\frac{\partial z}{\partial \xi}, & J_{\xi\eta}^{zx} &= -\frac{\partial z}{\partial \eta}, & J_{\xi\eta}^{xy} &= 1 \end{aligned} \quad (2.43)$$

のようになる。また、3次元の場合の (ξ, η, ζ) と (x, y, z) の間の座標変換のヤコビアン $G^{\frac{1}{2}}$ は、

$$G^{\frac{1}{2}} = \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right| \quad (2.44)$$

である。ここで、ヤコビアンの各成分のうち変数成分のみについて、次のように、

$$J_{31} \equiv J_{\xi\eta}^{yz} = -\frac{\partial z}{\partial \xi} \quad (2.45)$$

$$J_{32} \equiv J_{\xi\eta}^{zx} = -\frac{\partial z}{\partial \eta} \quad (2.46)$$

$$J_d \equiv J_{\eta\zeta}^{yz} = J_{\zeta\xi}^{zx} = \frac{\partial z}{\partial \zeta} \quad (2.47)$$

また、 ζ を、地表面の高さ $z_{sfc}(x, y)$ とモデルの領域の高さ z_{top} を用いて、

$$\zeta(x, y, z) = \frac{z_{top}[z - z_{sfc}(x, y)]}{z_{top} - z_{sfc}(x, y)} \quad (2.48)$$

または、

$$z(\xi, \eta, \zeta) = z_{sfc}(\xi, \eta) + \zeta \left[1 - \frac{z_{sfc}(\xi, \eta)}{z_{top}} \right] \quad (2.49)$$

のように定義する。

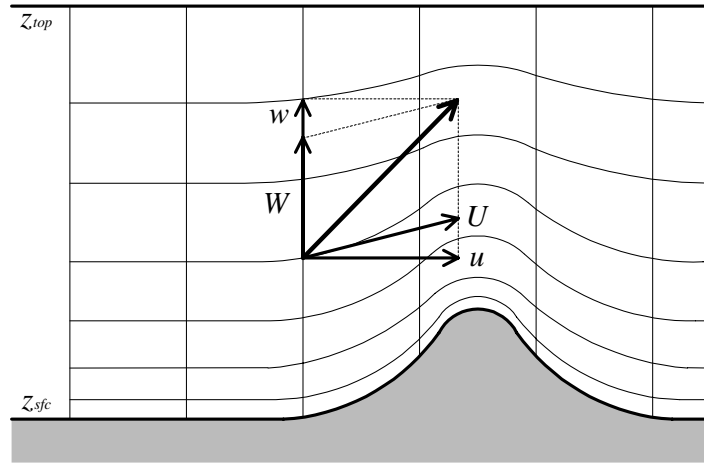


図 2.1. 地形に沿う座標系とベクトルの向き。

この場合、ヤコビアンの変数成分は、

$$J_{31} = -\frac{\partial z}{\partial \xi} = \left(\frac{\zeta}{z_{top}} - 1 \right) \frac{\partial z_{sfc}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \quad (2.50)$$

$$J_{32} = -\frac{\partial z}{\partial \eta} = \left(\frac{\zeta}{z_{top}} - 1 \right) \frac{\partial z_{sfc}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \quad (2.51)$$

$$J_d = \frac{\partial z}{\partial \zeta} = 1 - \frac{z_{sfc}(\xi, \eta)}{z_{top}} \quad (2.52)$$

のようになる。この場合のように ζ が z について単調増加関数の場合、

$$G^{\frac{1}{2}} = |J_d| = J_d \quad (2.53)$$

となる。結局、(2.38)~(2.40) で与えられる地形に沿う座標系の速度（反変速度）は、次のように変換される。

$$U = u \quad (2.54)$$

$$V = v \quad (2.55)$$

$$W = (uJ_{31} + vJ_{32} + w) / G^{\frac{1}{2}} \quad (2.56)$$

上記の関係を用いて、デカルト座標系から地形に沿う座標系に変換されるとき、ある変数 ϕ の空間微分は以下のように変換される。

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{G^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (J_{11}\phi) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (J_{31}\phi) \right] \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{G^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (J_{12}\phi) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (J_{32}\phi) \right] \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{1}{G^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \quad (2.59)$$

2.2.3 地形に沿う座標系における基本方程式

地形に沿う場合にも地形を含まない場合と同様に、従属変数のうちの温度と圧力、また、水物質と水蒸気を考慮した密度 ρ については、以下の地形の影響を考慮した静力学平衡、

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \zeta} = -G^{\frac{1}{2}} \bar{\rho} g \quad (2.60)$$

を満たす基準状態とそれからの偏差に分ける。また、表記を簡便にするため、次の変数変換

$$\rho^* = G^{\frac{1}{2}} \bar{\rho} \quad (2.61)$$

を用いて、各予報変数を以下のように表わす。

$$u^* = \rho^* u \quad (2.62)$$

$$v^* = \rho^* v \quad (2.63)$$

$$w^* = \rho^* w \quad (2.64)$$

$$W^* = \rho^* W \quad (2.65)$$

$$\theta^* = \rho^* \theta' \quad (2.66)$$

$$q_v^* = \rho^* q_v \quad (2.67)$$

$$q_x^* = \rho^* q_x \quad (2.68)$$

上記の変換を用いて、本章の節2.1で示した地形を含まない座標系における基本方程式系は、地形に沿う座標系では次のようになる。

運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial t} = & - \left(u^* \frac{\partial u}{\partial \xi} + v^* \frac{\partial u}{\partial \eta} + W^* \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \\ & - \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \{ J_d (p' - \alpha Div^*) \} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \{ J_{31} (p' - \alpha Div^*) \} \right] + (f_s v^* - f_c w^*) + G^{\frac{1}{2}} \text{Turb.} u \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^*}{\partial t} = & - \left(u^* \frac{\partial v}{\partial \xi} + v^* \frac{\partial v}{\partial \eta} + W^* \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) \\ & - \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \{ J_d (p' - \alpha Div^*) \} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \{ J_{32} (p' - \alpha Div^*) \} \right] - f_s u^* + G^{\frac{1}{2}} \text{Turb.} v \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^*}{\partial t} = & - \left(u^* \frac{\partial w}{\partial \xi} + v^* \frac{\partial w}{\partial \eta} + W^* \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial \zeta} (p' - \alpha Div^*) - \rho^* \text{Buoy.} w + f_c u^* + G^{\frac{1}{2}} \text{Turb.} w \end{aligned} \quad (2.71)$$

ここで浮力項の $\text{Buoy.} w$ は、

$$\text{Buoy.} w = -g \frac{\rho'}{\bar{\rho}} = g \left(\frac{\theta'}{\bar{\theta}} - \frac{p'}{\bar{\rho} c_s^2} + \frac{q'_v}{\epsilon + \bar{q}_v} - \frac{q'_v + \sum q_x}{1 + \bar{q}_v} \right) \quad (2.72)$$

である。ただし、 ϵ は水蒸気と乾燥空気の分子量の比を表わし、 c_s は空気中の音速で、

$$c_s = \sqrt{\gamma R_d \bar{T}}, \quad \gamma \equiv C_p / C_v \quad (2.73)$$

で与えられる。ここで、 g は重力加速度、 \bar{T} は基準状態の温度、 R_d は乾燥空気の気体定数、 C_p, C_v はそれぞれ乾燥空気の定圧・定積比熱である。また、 f_s, f_c はコリオリ係数で、地球の回転の角速度を ω 、緯度を φ とし、次のように表わされる。

$$f_s = 2\omega \sin \varphi \quad (2.74)$$

$$f_c = 2\omega \cos \varphi \quad (2.75)$$

さらに、気圧の項に現れる αDiv^* は人工的に入れた音波の減衰項で、

$$Div^* = \frac{1}{G^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial u^*}{\partial \xi} + \frac{\partial v^*}{\partial \eta} + \frac{\partial W^*}{\partial \zeta} \right) \quad (2.76)$$

である。

気圧偏差の方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial G^{\frac{1}{2}} p'}{\partial t} = & - \left(G^{\frac{1}{2}} u \frac{\partial p'}{\partial \xi} + G^{\frac{1}{2}} v \frac{\partial p'}{\partial \eta} + G^{\frac{1}{2}} W \frac{\partial p'}{\partial \zeta} \right) + G^{\frac{1}{2}} \bar{\rho} g w \\ & - \bar{\rho} c_s^2 \left(\frac{\partial G^{\frac{1}{2}} u}{\partial \xi} + \frac{\partial G^{\frac{1}{2}} v}{\partial \eta} + \frac{\partial G^{\frac{1}{2}} W}{\partial \zeta} \right) + G^{\frac{1}{2}} \bar{\rho} c_s^2 \left(\frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} - \frac{1}{Q} \frac{dQ}{dt} \right) \end{aligned} \quad (2.77)$$

ここで、 $Q = 1 + 0.61q_v + \sum q_x$ である。

温位偏差の方程式

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t} = - \left(u^* \frac{\partial \theta'}{\partial \xi} + v^* \frac{\partial \theta'}{\partial \eta} + W^* \frac{\partial \theta'}{\partial \zeta} \right) - \bar{\rho} w \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \zeta} + G^{\frac{1}{2}} \text{Turb.} \theta + \rho^* \text{Src.} \theta \quad (2.78)$$

水蒸気および水物質の混合比の方程式

$$\frac{\partial q_v^*}{\partial t} = - \left(u^* \frac{\partial q_v}{\partial \xi} + v^* \frac{\partial q_v}{\partial \eta} + W^* \frac{\partial q_v}{\partial \zeta} \right) + G^{\frac{1}{2}} \text{Turb.} q_v + \rho^* \text{Src.} q_v \quad (2.79)$$

$$\frac{\partial q_x^*}{\partial t} = - \left(u^* \frac{\partial q_x}{\partial \xi} + v^* \frac{\partial q_x}{\partial \eta} + W^* \frac{\partial q_x}{\partial \zeta} \right) + G^{\frac{1}{2}} \text{Turb.} q_x + \rho^* \text{Src.} q_x + \rho^* \text{Fall.} q_x \quad (2.80)$$

水物質の数密度の方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial G^{\frac{1}{2}} N_x}{\partial t} = & - \left[u^* \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{N_x}{\bar{\rho}} \right) + v^* \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{N_x}{\bar{\rho}} \right) + W^* \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{N_x}{\bar{\rho}} \right) \right] \\ & + G^{\frac{1}{2}} \text{Turb.} \frac{N_x}{\bar{\rho}} + \rho^* \text{Src.} \frac{N_x}{\bar{\rho}} + \rho^* \text{Fall.} \frac{N_x}{\bar{\rho}} \end{aligned} \quad (2.81)$$

地形を含まない場合と同様に、これらの式の他に乱流運動エネルギー E についての時間発展方程式があるが、それとこれらの式に現れるサブグリッドスケールの拡散項 $\text{Turb.}\phi$ については、第3章「サブグリッドスケールの拡散」で、また、温位と水物質の式に現れる生成・消滅項 $\text{Src.}\phi$ と落下項 $\text{Fall.}\phi$ については、第4章「雲・降水の物理過程」で述べる。

2.3 基本方程式系 — 地図投影

これまでの雲の数値モデルは地球の曲率を十分無視できる程度の領域で用いられることがほとんどであったので、地球の曲率の効果や地図投影によるゆがみの効果を考慮する必要はなかった。しかしながら、近年の並列コンピューターの大規模化・高速化とともに、雲を解像しながらでも、それらが無視できないほど広い領域での計算が可能になってきた。例えば、日本海を含む領域の計算や、台風を十分に広い領域でシミュレーションしようとする、地球の曲率の効果は無視できなくなり、地図投影が必要になる。その効果を取り入れるために、基本方程式系に**地図系数 (map factor)**を導入する。

通常、気象学で用いる地図投影図法や緯度経度座標系は、直交曲線座標系の一つと考えることができ、地形を含まない場合にはデカルト座標から直交曲線座標系への変換を行なえばよい。しかしながら、地形を含

む場合は水平方向の座標は直交しているが、それらに対して鉛直座標はもはや直交しておらず、一般の曲線座標となる。

そこで、ここでは一般の曲線座標として座標変換のテンソルを計算するのではなく、簡単のために、まず直交曲線座標系における地形を考えない地図投影の方程式系を求めておいてから、それに地形の効果を取り入れる方法をとる。まずはじめに、直交曲線座標系を用いる場合の微分作用素について整理しておく。

2.3.1 直交曲線座標

第2.2節にあるように、直交直線座標系 (x, y, z) の関数として空間のある領域で必要なだけ微分可能な3つの一価関数が定義されており、式(2.28)のようにその関数行列式が0でない場合は、曲線座標が定義される。その特別な場合として、基底が作る計量テンソル G_{ij} の対角成分のみがゼロでない場合、その基底は直交しており、そのような曲線座標を**直交曲線座標**という。

緯度経度座標や気象学で通常用いる地図投影座標系は、2次元の直交曲線座標系とみなすことができ、座標変換のテンソル解析を用いなくてもベクトル解析の範囲で定式化ができる。地図投影は2次元であるが、ここでは便宜上水平座標に直交する鉛直座標 z を含めて3次元の直交曲線座標を考える。ここでは一般的に直交曲線座標を考えるので、次のような座標系を定義する。

$$\xi = \xi(x, y, z) \quad (2.82)$$

$$\eta = \eta(x, y, z) \quad (2.83)$$

$$\zeta = \zeta(x, y, z) \quad (2.84)$$

さて、第2.2節では、正規でも直交でもない1次独立な基底 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ を導入したが、ここでは直交曲線座標を考えるので、これらは単位ベクトルでかつお互いに直交していると仮定する。すなわち、

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (2.85)$$

である。ここでは、基底が直交しているので、反変成分と共変成分は同じになり区別する必要はない。このとき、デカルト座標での線元素 $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ は、

$$ds^2 = (h_1 d\xi)^2 + (h_2 d\eta)^2 + (h_3 d\zeta)^2 \quad (2.86)$$

と与えられる。ここで、 h_i はメトリック係数（第1基本量）とよばれ、

$$h_1 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.87)$$

$$h_2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.88)$$

$$h_3 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \zeta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.89)$$

と与えられるので、 ξ 曲線、 η 曲線、 ζ 曲線の弧長 s_1, s_2, s_3 は、それぞれ、

$$ds_1 = h_1 d\xi \quad (2.90)$$

$$ds_2 = h_2 d\eta \quad (2.91)$$

$$ds_3 = h_3 d\zeta \quad (2.92)$$

と表わされる。

これらを用いて、直交曲線座標 (ξ, η, ζ) における勾配、発散、回転などを与えることができる。まず、任意のスカラー関数を $\phi(\xi, \eta, \zeta)$ とすると、直交曲線座標における勾配は、

$$\nabla\phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial\xi} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial\eta} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial\phi}{\partial\zeta} \mathbf{e}_3 \quad (2.93)$$

と与えられる。ただし、 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ は、直交曲線座標 (ξ, η, ζ) についての正規直交基底（単位接ベクトル）である。

さて、一般に、直交曲線座標の場合、任意のベクトル $\mathbf{A} = A^\xi \mathbf{e}_1 + A^\eta \mathbf{e}_2 + A^\zeta \mathbf{e}_3$ の座標成分 (A^ξ, A^η, A^ζ) だけでなく、その単位接ベクトル $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ も座標 (ξ, η, ζ) の関数であるので、ベクトル量 \mathbf{A} に微分演算子を作用させるときは単位接ベクトルも微分されなければならない、例えば、

$$\frac{\partial A^\xi \mathbf{e}_1}{\partial\eta} = \mathbf{e}_1 \frac{\partial A^\xi}{\partial\eta} + A^\xi \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial\eta} \quad (2.94)$$

のようになる。また、単位接ベクトルの 9 個の微分 $\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \xi_j}$ は、それぞれ、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \xi} &= -\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \mathbf{e}_2 - \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial \zeta} \mathbf{e}_3, & \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \eta} &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} \mathbf{e}_2, & \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \zeta} &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial \xi} \mathbf{e}_3, \\ \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \xi} &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \mathbf{e}_1, & \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \eta} &= -\frac{1}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \zeta} \mathbf{e}_3 - \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} \mathbf{e}_1, & \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \zeta} &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial \eta} \mathbf{e}_3, \\ \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial \xi} &= \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial \zeta} \mathbf{e}_1, & \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial \eta} &= \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \zeta} \mathbf{e}_2, & \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial \zeta} &= -\frac{1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial \xi} \mathbf{e}_1 - \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial \eta} \mathbf{e}_2 \\ & & & & \dots\dots\dots & (2.95) \end{aligned}$$

と与えられる。よって、任意のベクトル \mathbf{A} の直交曲線座標における発散は、

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (h_2 h_3 A^\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_3 h_1 A^\eta) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (h_1 h_2 A^\zeta) \right] \quad (2.96)$$

のように、また、回転は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ h_2 h_3 & h_3 h_1 & h_1 h_2 \\ \frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ h_1 A^\xi & h_2 A^\eta & h_3 A^\zeta \end{vmatrix} \\ &= \frac{\mathbf{e}_1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial (h_3 A^\zeta)}{\partial \eta} - \frac{\partial (h_2 A^\eta)}{\partial \zeta} \right] + \frac{\mathbf{e}_2}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial (h_1 A^\xi)}{\partial \zeta} - \frac{\partial (h_3 A^\zeta)}{\partial \xi} \right] + \frac{\mathbf{e}_3}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial (h_2 A^\eta)}{\partial \xi} - \frac{\partial (h_1 A^\xi)}{\partial \eta} \right] \\ &\dots\dots (2.97) \end{aligned}$$

最後に、任意のスカラー関数 $\phi(\xi, \eta, \zeta)$ のラプラシアンは、

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) \right] \quad (2.98)$$

と与えられる。

2.3.2 地図投影座標系における基本方程式系 — 地形を含まない場合

地球上の各点は、緯度経度座標や地図投影上の点と 1 対 1 の対応関係を与えることができるので、曲線座標とみなすことができる。さらに、緯度経度座標や気象学で用いる地図投影は、水平方向の座標はお互いに直交しており、鉛直方向を第 3 の座標とすると、地形を含まない基礎方程式系の場合には、これらは 3 次元の直交曲線座標として扱うことができる。ここでは、水平方向の座標を (ξ, η) 、鉛直方向の座標を z 、それぞれの単位接ベクトルを $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ として、地図投影座標系における基礎方程式を求める。

まず、メトリック係数（拡大因数）を、

$$h_1 = \frac{1}{m} \quad (2.99)$$

$$h_2 = \frac{1}{n} \quad (2.100)$$

$$h_3 = 1 \quad (2.101)$$

としておく。さて、 m, n は次の節で地図係数として扱われるが、ここでは、一般性を持たせるために拡大因数としておく。例えば、球面座標であれば、

$$m = \frac{1}{a \cos \phi} \quad (2.102)$$

$$n = \frac{1}{a} \quad (2.103)$$

である。ただし、 a は地球の半径、 ϕ は緯度である。拡大因数がこれらの形をとると、後に求める拡大因数を含む方程式系は球面の方程式系に帰着できる。

さて、このとき、ある点 P とその近傍の座標を (ξ, η, z) と $(\xi + d\xi, \eta + d\eta, z + dz)$ とすると、各座標軸上の距離 ds_1, ds_2, ds_3 は、

$$ds_1 = \frac{d\xi}{m} \quad (2.104)$$

$$ds_2 = \frac{d\eta}{n} \quad (2.105)$$

$$ds_3 = dz \quad (2.106)$$

また、単位接ベクトルの座標軸方向の微分は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \xi} &= -n \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{m} \right) \mathbf{e}_2 - \frac{1}{am} \mathbf{e}_3, & \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \eta} &= m \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{n} \right) \mathbf{e}_2, & \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \xi} &= n \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{m} \right) \mathbf{e}_1, & \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \eta} &= -\frac{1}{an} \mathbf{e}_3 - m \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{n} \right) \mathbf{e}_1, & \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial \xi} &= \frac{1}{am} \mathbf{e}_1, & \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial \eta} &= \frac{1}{an} \mathbf{e}_2, & \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (2.107)$$

のようになる。以下ではこれらを用いて、運動方程式、熱力学方程式、圧縮系の連続方程式、水蒸気混合比の式、雲・降水粒子の混合比の式、および、雲・降水粒子の数密度の式を書き換える。

まず、運動方程式について考える。地形を含まない場合の運動方程式 (2.7)~(2.9) をこの直交座標系 (ξ, η, z) で表すことが、ここの目標である。

速度ベクトル \mathbf{u} を (ξ, η, z) の座標で表すと、

$$\mathbf{u} = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + w\mathbf{e}_3 \quad (2.108)$$

であるが、(2.104)~(2.106) を考慮すると速度の各成分は、次のようになる。

$$u = \frac{ds_1}{dt} = \frac{1}{m} \frac{d\xi}{dt} \quad (2.109)$$

$$v = \frac{ds_2}{dt} = \frac{1}{n} \frac{d\eta}{dt} \quad (2.110)$$

$$w = \frac{ds_3}{dt} = \frac{dz}{dt} \quad (2.111)$$

地図投影における全微分は、

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{d\xi}{dt} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{d\eta}{dt} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.112)$$

であり、式(2.109)~(2.111)を考慮すると、

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + mu \frac{\partial}{\partial \xi} + nv \frac{\partial}{\partial \eta} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.113)$$

となる。よって、曲線座標系における速度(2.108)の時間微分は、

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{du}{dt} \mathbf{e}_1 + \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_2 + \frac{dw}{dt} \mathbf{e}_3 + u \frac{d\mathbf{e}_1}{dt} + v \frac{d\mathbf{e}_2}{dt} + w \frac{d\mathbf{e}_3}{dt} \quad (2.114)$$

となり、単位接ベクトルの時間微分を(2.107)および(2.113)を考慮すると、(2.114)の右辺後半の単位接ベクトルの時間微分の項は、

$$\begin{aligned} u \frac{d\mathbf{e}_1}{dt} + v \frac{d\mathbf{e}_2}{dt} + w \frac{d\mathbf{e}_3}{dt} &= -\mathbf{e}_1 mnv \left[v \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{n} \right) - u \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{m} \right) \right] + \mathbf{e}_1 \frac{uw}{a} \\ &\quad + \mathbf{e}_2 mnu \left[v \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{n} \right) - u \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{m} \right) \right] + \mathbf{e}_1 \frac{vw}{a} - \mathbf{e}_3 \frac{u^2 + v^2}{a} \end{aligned} \quad (2.115)$$

のようになる。これらの項は座標系が直線ではなく、単位ベクトルが場所によって変化することによって現れる項で、**曲率項**あるいは**メトリック項**と呼ばれる。

次に、コリオリ力の項は、 $2\boldsymbol{\Omega}$ の座標系 (ξ, η, z) の各成分を (f_ξ, f_η, f_z) で表すと、

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 2\Omega_\xi & 2\Omega_\eta & 2\Omega_z \\ u & v & w \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{e}_1(f_\eta w - f_z v) + \mathbf{e}_2(f_z u - f_\xi w) + \mathbf{e}_3(f_\xi v - f_\eta u) \end{aligned} \quad (2.116)$$

また、気圧傾度力は(2.93)より、

$$\nabla p' = m \frac{\partial p'}{\partial \xi} \mathbf{e}_1 + n \frac{\partial p'}{\partial \eta} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial p'}{\partial z} \mathbf{e}_3 \quad (2.117)$$

と与えられる。

これらを用いると、運動方程式 (2.7)~(2.9) は、以下ようになる。

運動方程式

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{\partial u}{\partial t} = & -\bar{\rho} \left(mu \frac{\partial u}{\partial \xi} + nv \frac{\partial u}{\partial \eta} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ & -m \frac{\partial p'}{\partial \xi} + \bar{\rho}(f_{\eta}w - f_z v) + \bar{\rho}mnv \left[v \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{n} \right) - u \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{m} \right) \right] - \bar{\rho} \frac{uw}{a} + \text{Turb.}u \end{aligned} \quad (2.118)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{\partial v}{\partial t} = & -\bar{\rho} \left(mu \frac{\partial v}{\partial \xi} + nv \frac{\partial v}{\partial \eta} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ & -n \frac{\partial p'}{\partial \eta} + \bar{\rho}(f_z u - f_{\xi}w) - \bar{\rho}mnu \left[v \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{n} \right) - u \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{m} \right) \right] - \bar{\rho} \frac{vw}{a} + \text{Turb.}v \end{aligned} \quad (2.119)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{\partial w}{\partial t} = & -\bar{\rho} \left(mu \frac{\partial w}{\partial \xi} + nv \frac{\partial w}{\partial \eta} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ & - \frac{\partial p'}{\partial z} - \bar{\rho} \text{Buoy.}w + \bar{\rho}(f_{\xi}v - f_{\eta}u) + \bar{\rho} \frac{u^2 + v^2}{a} + \text{Turb.}w \end{aligned} \quad (2.120)$$

ここで、 $\bar{\rho} = \bar{\rho}(z)$ は基本場の密度で、鉛直座標のみの関数である。また、 $\text{Buoy.}w$ は浮力項である。

同様にして、気圧偏差の式 (2.10)、温位偏差の式 (2.11)、および、水蒸気や雲物理に関する式 (2.12)~(2.14) を書きかえると、以下ようになる。

気圧偏差の方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial t} = & - \left(mu \frac{\partial p'}{\partial \xi} + nv \frac{\partial p'}{\partial \eta} + w \frac{\partial p'}{\partial z} \right) + \bar{\rho}gw \\ & - \bar{\rho}c_s^2 \left[mn \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{u}{m} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{v}{n} \right) + \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \bar{\rho}c_s^2 \left(\frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} - \frac{1}{Q} \frac{dQ}{dt} \right) \end{aligned} \quad (2.121)$$

温位偏差の方程式

$$\bar{\rho} \frac{\partial \theta'}{\partial t} = -\bar{\rho} \left(mu \frac{\partial \theta'}{\partial \xi} + nv \frac{\partial \theta'}{\partial \eta} + w \frac{\partial \theta'}{\partial z} \right) - \bar{\rho}w \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} + \bar{\rho} \text{Src.}\theta + \text{Turb.}\theta \quad (2.122)$$

水蒸気および水物質の混合比の方程式

$$\bar{\rho} \frac{\partial q_v}{\partial t} = -\bar{\rho} \left(mu \frac{\partial q_v}{\partial \xi} + nv \frac{\partial q_v}{\partial \eta} + w \frac{\partial q_v}{\partial z} \right) + \bar{\rho} \text{Src.}q_v + \text{Turb.}q_v \quad (2.123)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial q_x}{\partial t} = -\bar{\rho} \left(mu \frac{\partial q_x}{\partial \xi} + nv \frac{\partial q_x}{\partial \eta} + w \frac{\partial q_x}{\partial z} \right) + \bar{\rho} \text{Fall.}q_x + \bar{\rho} \text{Src.}q_x + \text{Turb.}q_x \quad (2.124)$$

水物質の数密度の方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial t} = & -\bar{\rho} \left[mu \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{N_x}{\bar{\rho}} \right) + nv \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{N_x}{\bar{\rho}} \right) + w \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{N_x}{\bar{\rho}} \right) \right] \\ & + \bar{\rho} \text{Src.} \frac{N_x}{\bar{\rho}} + \bar{\rho} \text{Fall.} \frac{N_x}{\bar{\rho}} + \text{Turb.} \frac{N_x}{\bar{\rho}} \end{aligned} \quad (2.125)$$

なお、この他に乱流に関わるものとして、乱流運動エネルギーの時間発展方程式と各式に現れる拡散項 $\text{Turb.}\phi$ も変更されなければならないが、これについては第3章「サブグリッドスケールの拡散」で述べる。

2.3.3 地図投影座標系における基本方程式系 — 地形を含む場合

前節までで、地図係数を入れた基本方程式系を求める準備ができたので、本節では、地図係数を含む地形に沿う座標系の基本方程式を求める。先に述べたように地形に沿う座標系を鉛直座標として選ぶと、その座標系はもはや直交座標系にはならず、一般の曲線座標系になる。しかしながら、地図係数は鉛直方向の座標の関数ではないので、ここでは前節で求めた直交曲線座標系に、第2.2節の地形の導入と同じ手続きで地形に沿う座標系に直すことができる。

さて、前節までは、 m, n は拡大係数として扱ってきたが、ここでは通常気象学で用いられる地図投影の地図係数 (map factor) と考える。気象学で用いられる地図投影法は、平射図法 (ステレオ図法)、ランベルト正角円錐図法、正角円筒図法 (メルカトル図法) などの**正角図法**である。正角図法とは「角が正しい」または「形が正しい」もので、水平方向の2つの座標方向のメトリック係数が地図上のすべての点において等しいものである。すなわち、

$$\left(h_1 = \frac{1}{m} \right) = \left(h_2 = \frac{1}{n} \right) \quad (2.126)$$

である。一般には、これらの地図係数は緯度と経度の関数である。

この座標系での全微分は、(2.109)～(2.111)を考慮すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{d\xi}{dt} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{d\eta}{dt} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{d\zeta}{dt} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + mu \frac{\partial}{\partial \xi} + mv \frac{\partial}{\partial \eta} + W \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (2.127)$$

となり、鉛直速度 W は、

$$\begin{aligned} W = \frac{d\zeta}{dt} &= mu \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + mv \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} \\ &= \left[mu \left(-\frac{\partial z}{\partial \xi} \right) + mv \left(-\frac{\partial z}{\partial \eta} \right) + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right] \frac{\partial \zeta}{\partial z} \\ &= \frac{1}{G^{\frac{1}{2}}} (mu J_{31} + mv J_{32} + w) \end{aligned} \quad (2.128)$$

のようになる。また、ある変数 ϕ の空間微分は、

$$m \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \rightarrow m \frac{1}{G^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (J_d \phi) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (J_{31} \phi) \right] \quad (2.129)$$

$$m \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \rightarrow m \frac{1}{G^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (J_d \phi) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (J_{32} \phi) \right] \quad (2.130)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \rightarrow \frac{1}{G^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \quad (2.131)$$

のように変換される。

これらを用いて方程式系を書き換えると、以下のように与えられる。

運動方程式

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{\partial u}{\partial t} = & -\bar{\rho} \left(mu \frac{\partial u}{\partial \xi} + mv \frac{\partial u}{\partial \eta} + W \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) - m \frac{1}{G^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (J_d p') + \frac{\partial}{\partial \zeta} (J_{31} p') \right] \\ & + \bar{\rho} (f_\eta w - f_z v) + \bar{\rho} m^2 v \left[v \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{m} \right) - u \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{m} \right) \right] - \bar{\rho} \frac{uw}{a} + \text{Turb.}u \end{aligned} \quad (2.132)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{\partial v}{\partial t} = & -\bar{\rho} \left(mu \frac{\partial v}{\partial \xi} + mv \frac{\partial v}{\partial \eta} + W \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) - m \frac{1}{G^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (J_d p') + \frac{\partial}{\partial \zeta} (J_{32} p') \right] \\ & + \bar{\rho} (f_z u - f_\xi w) - \bar{\rho} m^2 u \left[v \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{m} \right) - u \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{m} \right) \right] - \bar{\rho} \frac{vw}{a} + \text{Turb.}v \end{aligned} \quad (2.133)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{\partial w}{\partial t} = & -\bar{\rho} \left(mu \frac{\partial w}{\partial \xi} + mv \frac{\partial w}{\partial \eta} + W \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) \\ & - \frac{1}{G^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial p'}{\partial \zeta} - \bar{\rho} \text{Buoy.}w + \bar{\rho} (f_\xi v - f_\eta u) + \bar{\rho} \frac{u^2 + v^2}{a} + \text{Turb.}w \end{aligned} \quad (2.134)$$

気圧偏差の方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial t} = & - \left(mu \frac{\partial p'}{\partial \xi} + mv \frac{\partial p'}{\partial \eta} + W \frac{\partial p'}{\partial \zeta} \right) + \bar{\rho} gw \\ & - \bar{\rho} c_s^2 \frac{1}{G^{\frac{1}{2}}} \left[m^2 \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{G^{\frac{1}{2}} u}{m} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{G^{\frac{1}{2}} v}{m} \right) + \frac{\partial G^{\frac{1}{2}} w}{\partial \zeta} \right] + \bar{\rho} c_s^2 \left(\frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} - \frac{1}{Q} \frac{dQ}{dt} \right) \end{aligned} \quad (2.135)$$

温位偏差の方程式

$$\bar{\rho} \frac{\partial \theta'}{\partial t} = -\bar{\rho} \left(mu \frac{\partial \theta'}{\partial \xi} + mv \frac{\partial \theta'}{\partial \eta} + W \frac{\partial \theta'}{\partial \zeta} \right) - \bar{\rho} w \frac{1}{G^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \zeta} + \bar{\rho} \text{Src.} \theta + \text{Turb.} \theta \quad (2.136)$$

水蒸気および水物質の混合比の方程式

$$\bar{\rho} \frac{\partial q_v}{\partial t} = -\bar{\rho} \left(mu \frac{\partial q_v}{\partial \xi} + mv \frac{\partial q_v}{\partial \eta} + W \frac{\partial q_v}{\partial \zeta} \right) + \bar{\rho} \text{Src}.q_v + \text{Turb}.q_v \quad (2.137)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial q_x}{\partial t} = -\bar{\rho} \left(mu \frac{\partial q_x}{\partial \xi} + mv \frac{\partial q_x}{\partial \eta} + W \frac{\partial q_x}{\partial \zeta} \right) + \bar{\rho} \text{Fall}.q_x + \bar{\rho} \text{Src}.q_x + \text{Turb}.q_x \quad (2.138)$$

水物質の数密度の方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial t} = & -\bar{\rho} \left[mu \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{N_x}{\bar{\rho}} \right) + mv \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{N_x}{\bar{\rho}} \right) + W \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{N_x}{\bar{\rho}} \right) \right] \\ & + \bar{\rho} \text{Src} \cdot \frac{N_x}{\bar{\rho}} + \bar{\rho} \text{Fall} \cdot \frac{N_x}{\bar{\rho}} + \text{Turb} \cdot \frac{N_x}{\bar{\rho}} \end{aligned} \quad (2.139)$$

以上で地形に沿う地図投影座標のの方程式系が求められたが、これらの表記を簡便にするために、アスタリスクの付いた変数 (2.61)~(2.68) を用い、また、

$$m^2 \left[v \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{m} \right) - u \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{m} \right) \right] = u \frac{\partial m}{\partial \eta} - v \frac{\partial m}{\partial \xi} \quad (2.140)$$

であることに注意して、これらを書き換えて形を整えると、以下のようになる。

運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial t} = & - \left(mu^* \frac{\partial u}{\partial \xi} + mv^* \frac{\partial u}{\partial \eta} + W^* \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) - m \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (J_d p') + \frac{\partial}{\partial \zeta} (J_{31} p') \right] \\ & + (f_\eta w^* - f_z v^*) + v^* \left[u \frac{\partial m}{\partial \eta} - v \frac{\partial m}{\partial \xi} \right] - u^* \frac{w}{a} + G^{\frac{1}{2}} \text{Turb}.u \end{aligned} \quad (2.141)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^*}{\partial t} = & - \left(mu^* \frac{\partial v}{\partial \xi} + mv^* \frac{\partial v}{\partial \eta} + W^* \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) - m \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (J_d p') + \frac{\partial}{\partial \zeta} (J_{32} p') \right] \\ & + (f_z u^* - f_\xi w^*) - u^* \left[u \frac{\partial m}{\partial \eta} - v \frac{\partial m}{\partial \xi} \right] - v^* \frac{w}{a} + G^{\frac{1}{2}} \text{Turb}.v \end{aligned} \quad (2.142)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^*}{\partial t} = & - \left(mu^* \frac{\partial w}{\partial \xi} + mv^* \frac{\partial w}{\partial \eta} + W^* \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) \\ & - \frac{\partial p'}{\partial \zeta} - \rho^* \text{Buoy}.w + (f_\xi v^* - f_\eta u^*) + \frac{u^* u + v^* v}{a} + G^{\frac{1}{2}} \text{Turb}.w \end{aligned} \quad (2.143)$$

気圧偏差の方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial G^{\frac{1}{2}} p'}{\partial t} = & -G^{\frac{1}{2}} \left(mu \frac{\partial p'}{\partial \xi} + mv \frac{\partial p'}{\partial \eta} + W \frac{\partial p'}{\partial \zeta} \right) + gw^* \\ & - \bar{\rho} c_s^2 \left[m^2 \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{G^{\frac{1}{2}} u}{m} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{G^{\frac{1}{2}} v}{m} \right) + \frac{\partial G^{\frac{1}{2}} w}{\partial \zeta} \right] + G^{\frac{1}{2}} \bar{\rho} c_s^2 \left(\frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} - \frac{1}{Q} \frac{dQ}{dt} \right) \end{aligned} \quad (2.144)$$

温位偏差の方程式

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t} = - \left(mu^* \frac{\partial \theta'}{\partial \xi} + mv^* \frac{\partial \theta'}{\partial \eta} + W^* \frac{\partial \theta'}{\partial \zeta} \right) - \bar{\rho} w \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \zeta} + \rho^* \text{Src.} \theta + G^{\frac{1}{2}} \text{Turb.} \theta \quad (2.145)$$

水蒸気および水物質の混合比の方程式

$$\frac{\partial q_v^*}{\partial t} = - \left(mu^* \frac{\partial q_v}{\partial \xi} + mv^* \frac{\partial q_v}{\partial \eta} + W^* \frac{\partial q_v}{\partial \zeta} \right) + \rho^* \text{Src.} q_v + G^{\frac{1}{2}} \text{Turb.} q_v \quad (2.146)$$

$$\frac{\partial q_x^*}{\partial t} = - \left(mu^* \frac{\partial q_x}{\partial \xi} + mv^* \frac{\partial q_x}{\partial \eta} + W^* \frac{\partial q_x}{\partial \zeta} \right) + \rho^* \text{Fall.} q_x + \rho^* \text{Src.} q_x + G^{\frac{1}{2}} \text{Turb.} q_x \quad (2.147)$$

水物質の数密度の方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial G^{\frac{1}{2}} N_x}{\partial t} = & - \left[mu^* \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{N_x}{\bar{\rho}} \right) + mv^* \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{N_x}{\bar{\rho}} \right) + W^* \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{N_x}{\bar{\rho}} \right) \right] \\ & + \rho^* \text{Src.} \frac{N_x}{\bar{\rho}} + \rho^* \text{Fall.} \frac{N_x}{\bar{\rho}} + G^{\frac{1}{2}} \text{Turb.} \frac{N_x}{\bar{\rho}} \end{aligned} \quad (2.148)$$

なお、実際の計算では音波による計算不安定を抑えるため、気圧偏差 p' は人工的に入れた音波の減衰項 αDiv^* を含む、 $p' - \alpha \text{Div}^*$ で置き換えられる。この項の地図投影座標系における表記は、次のように与えられる。

$$\text{Div}^* = \frac{1}{G^{\frac{1}{2}}} \left[m^2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial \xi} \frac{1}{m} + \frac{\partial v^*}{\partial \eta} \frac{1}{m} \right) + \frac{\partial W^*}{\partial \zeta} \right] \quad (2.149)$$

前節と同様に、乱流運動エネルギーの時間発展方程式と各式に現れる拡散項 $\text{Turb.} \phi$ の変換については、第3章「サブグリッドスケールの拡散」で述べる。

2.3.4 正角投影図法

先にも述べたとおり、一般に領域気象モデルで採用される地図投影は、正角投影法である。それは、拡大係数 m, n の方向性を考えなくてもよくなり、基礎方程式系への導入が容易になるからである。

しかしながら、投影方法により歪の分布は異なるので、地球のどの一部分を切り出しても計算できるようにするためには、種々の投影法を採用しなければならない。**CReSS** では、計算領域の緯度分布に対して次の3種類の投影図法を採用しており、ここでは、それらの詳細について述べる。

- 平射図法（ステレオ図法）：高緯度における計算に用いる。
- ランベルト正角円錐図法：中緯度における計算に用いる。
- 正角円筒図法（メルカトル図法）：低緯度における計算に用いる。

平射図法（ステレオ図法）

図より、緯度・経度方向のそれぞれの拡大率は、 $p = \frac{\pi}{2} - \phi$ を用いて、

$$m_\lambda = \frac{1}{a} \frac{\delta r}{\delta p} \quad (2.150)$$

$$n_\phi = \frac{r\lambda}{a\lambda \sin p} = \frac{r}{a \sin p} \quad (2.151)$$

であるが、この図法は正角投影であり、 $m_\lambda = n_\phi$ でなければならないので、

$$\frac{1}{a} \frac{\delta r}{\delta p} = \frac{r}{a \sin p} \quad (2.152)$$

であり、結局、次の微分方程式が得られる。

$$\frac{\delta r}{r} = \frac{\delta p}{\sin p} \quad (2.153)$$

これを解くと、 c を積分定数として、

$$r = c \left(\tan \frac{p}{2} \right) \quad (2.154)$$

が得られるが、ある基準緯度 p では歪がないので、式 (2.151) を用いて、

$$n_\phi = \frac{c \tan \frac{p}{2}}{2a \sin \frac{p}{2} \cos \frac{p}{2}} = \frac{c}{2a \cos^2 \frac{p}{2}} = 1 \quad (2.155)$$

となる。

ランベルト正角円錐図法

正角円筒図法（メルカトル図法）

緯度 ϕ における緯線方向の拡大率は、

$$n_\phi = \frac{2\pi a}{2\pi a \cos \phi} = \sec \phi \quad (2.156)$$

である。この図法は正角投影であるので、経度方向の拡大率についても、

$$m_\lambda = \sec \phi \quad (2.157)$$

でなければならない。

さて、正角円筒図法では、図で見るとおり、経度方向を x 、緯度方向を y に単純に置き換えることができる。今、地図上における基準経度からの経度 λ までの距離を x 、赤道からの緯度 ϕ までの距離を y とすれば、

$$x = a\lambda \quad (2.158)$$

$$\delta y = a \sec \phi \delta \phi \quad (2.159)$$

書くことができる。 y 方向については、微分方程式を解いて、

$$y = a \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right] \quad (2.160)$$

となる。