

第5章

大気境界層・地表面過程・地温

雲のモデルではその積分時間が数時間から 10 時間程度と短いため、多くの現象は大気のプロセスで規定される。しかしながら、地表面（陸面および海面）からのフラックスが大きい場合、たとえば夏季の熱雷や冬季の日本海上の雪雲などの場合、その雲・降水システムの発達に地表面過程が本質的に重要である。

ここでは地表面過程として、次のものを考慮し、それらのプロセスを単純なバルク法で表現する。

- 大気境界層における鉛直 1 次元拡散
- 地表面から大気への顕熱・潜熱フラックス
- 運動量フラックス（地表面摩擦）
- 地中の温度変化

CReSS では、これらのプロセスを鉛直 1 次元で定式化された方法で表現し、JSM (Japan Spectral Model) で用いられていた Segami et al. (1989) の地表面フラックスのバルク法と地中温度の予報を採用した。RAMS、ARPS などでは複雑な土壌・植生モデルが組み込まれているが、広域（たとえばユーラシア大陸全部を含むような領域）で長期積分（月単位）をするとき以外ではこれらはあまり重要ではないので、これについては将来の課題とする。

5.1 大気境界層の基礎理論

ここでは、本章で説明する大気境界層過程を理解するための基礎的な理論について簡単にまとめる¹。

5.1.1 大気境界層の構造

地球大気はその下部境界として地表面と接している。地表面には陸面や海面など様々なものがあるが、一般に大気は地表に近いほどその影響を強く受ける。地表面の状態や大気の状態にもよるが、その影響は地表面から1~2kmの高さまで及ぶ。このような地表面の熱的、力学的影響を受けた大気の層は、大気境界層 (atmospheric boundary layer) あるいはプラネタリー境界層 (planetary boundary layer; PBL) と呼ばれている。

大気境界層は、地表から20~50mの特に地表面の影響の大きい接地層または接地境界層 (surface boundary layer) と、その上のエクマン層 (Ekman layer) または外部境界層 (outer boundary layer) と呼ばれる大気層に分けられる。なお、大気境界層の上の大気を自由大気 (free atmosphere) という。

接地境界層の中では、顕熱、潜熱、運動量などの鉛直フラックスが、鉛直方向に一定で、地表の値と等しいという著しい性質を持っている。逆にこれらの鉛直フラックスが地表の値に等しい層を接地境界層と呼んでもよい。このため接地境界層は等フラックス層 (constant flux layer) ということがある。運動量フラックスが一定であるので、接地境界層の中では乱れによる応力が高さによらない。このため風向も一定である。

5.1.2 乱流輸送のパラメタリゼーション

大気中には様々なスケールの運動があるが、そのうちの数値モデルなどの格子点で表現できる運動を格子点スケールの平均運動 (grid-scale motion) または平均運動 (mean motion)、格子点以下のスケールの運動を乱流運動 (subgrid-scale motion, eddy motion) という。

これらを分離するために、速度や温度、水蒸気混合比といった物理量 A を、次のように、格子点で表現できる平均量とそれからの偏差量に分ける。

$$A = \bar{A} + A'' \quad (5.1)$$

物理量の平均には様々な方法があるが、ここでは詳細には触れない。ちなみに、偏差量の平均と2つの物理量の積の平均について、

$$\overline{A''} = 0 \quad (5.2)$$

$$\overline{AB} = \bar{A}\bar{B} + \overline{A''B''} \quad (5.3)$$

である。すなわち積の量を平均しても個々の平均の積には必ずしもならず、上式の第2項が現れる。これを運動方程式の x 成分に適用する。ここでは簡単のため非圧縮流体 ($\rho = \text{const.}$) を考えると、

¹ここでは主に小倉義光著「気象力学通論」と、竹内清秀・近藤純正著「大気科学講座 1 - 地表に近い大気」を参考にした。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - f\bar{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \\ - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \overline{\rho u'' u''} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\rho u'' v''} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho u'' w''} \right) + \nu \nabla^2 \bar{u} \end{aligned} \quad (5.4)$$

のように、平均量とそれからのずれによって表わすことができる。この式に現れる $-\overline{\rho u'' u''}$, $-\overline{\rho u'' v''}$, $-\overline{\rho u'' w''}$ の項は、乱流による応力を表しており、渦動応力 (eddy stress) あるいはレイノルズ応力 (Reynolds stress) と呼ぶ。これらは運送量の輸送と考えることができ、渦により運動量が輸送されることが応力となっている。

同様に、温位や混合比などについても、

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial x} \overline{u'' \theta''} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'' \theta''} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{w'' \theta''} \quad (5.5)$$

と表わされる。

これらのプライムの付いた量は格子点で表現できないので、モデルで扱うためにはこれらの量を格子点の量で (平均の量で) 表現しなければ、これらの効果すなわち格子点以下の渦運動による輸送の効果を反映することができない。このようなプライムのついた渦による偏差を格子点量で如何に表現するのかということが、乱流のパラメタリゼーションの問題である。なお、ここに現れる $\overline{\quad}$ のついた量は、第2章などに現れるものと定義が異なることに注意されたい (以下の節においても)。

5.1.3 混合距離理論

乱流の章でも述べたように、大気中の運動には必ず格子点以下の運動が存在するので、(5.4) や (5.5) にみられるような偏差の相関量が現れて、方程式系が閉じない。これはクロージャー問題とよばれるもので、方程式系を閉じさせるためには、乱流による輸送量の項を格子点の関数として表現しなければならない。そのような乱流のパラメタリゼーションの一つの方法として、Prandtl (1925) の混合距離理論がある。これは気体分子運動論の類推から、次のように説明される。

鉛直方向の高さ $z - l''$ にある空気塊の平均の速度が $\bar{u}(z - l'')$ であるとし、それが l'' だけ鉛直上方に移動して高さ z に達して、その運動量を周囲に与えたとする。そのときの速度の変化 u'' は、

$$u'' = \bar{u}(z - l'') - \bar{u}(z) \cong -l'' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (5.6)$$

なので、レイノルズ応力は、

$$\tau_{zx} = -\overline{\rho u'' w''} = \overline{\rho l'' w''} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \rho K_{mz} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (5.7)$$

となる。ここで、

$$K_{mz} = \overline{l'' w''} \quad (5.8)$$

を、渦粘性係数 (eddy viscosity coefficient) という。

次に、中立成層をした流体を考える。このとき浮力の影響を無視できるので、 $|w''| \sim |u''|$ と考えられ、

$$w'' \sim u'' \cong -l'' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (5.9)$$

と仮定できる。このことより、

$$\tau_{zx} = -\overline{\rho u'' w''} = \rho \overline{l''^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \quad (5.10)$$

であり、また、

$$K_{mz} = \overline{l''^2} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \quad (5.11)$$

のように表すことができる。これらにより、

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho u'' w''} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho K_{mz} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \quad (5.12)$$

$$-\frac{\partial}{\partial z} \overline{w'' \theta''} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(K_{hz} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right) \quad (5.13)$$

のように表すことができる。

このように乱流による物理量の輸送量を、気体分子運動論の類推で、平均場を用いて表現する方法を、Prandtlの混合距離理論 (mixing length theory) という。これを一般的に乱流の輸送に適用することには困難があるが、接地境界層について適用し、地表面フラックスを求めるための基礎理論となっている。エクマン境界層を含む大気境界層全体についてのクロージャの問題については別の扱いが必要である。

5.1.4 接地境界層

はじめに述べたように接地境界層は等フラックス層と呼ばれるように、どの高さでも運動量の鉛直フラックスが地表における値に等しく、応力が一定である。このため接地境界層内では風向も一定で、この平均風の方向を x 方向にとる。このとき (5.10) より、

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{\tau_{zx}}{\rho}} \quad (5.14)$$

である。ここで、 $l = \sqrt{l''^2}$ である。接地境界層内で運動量を輸送する乱渦の大きさは、地表面により制限を受けるので、混合距離 l を、

$$l = k z \quad (5.15)$$

のように仮定する。ここで z は地表面からの距離、 k は無次元の量でカルマン定数 (Karman constant) と呼ばれている。 k は風洞実験や観測から $k = 0.4$ 程度であるとされている²。

次に、

$$u_*^2 \equiv \frac{\tau_{zx}}{\rho} = -\overline{u'w'} \quad (5.16)$$

で定義される u_* を導入する。これは摩擦速度 (friction velocity) とよばれ、速度の次元を持ち、乱流の強さのスケールを表すものである。

観測によれば接地境界層の中では、運動量の鉛直方向の輸送量 (または応力) は高度について一定であるので、これらの式より、

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_{zx}}{\rho}} = kz \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \text{const.} \quad (5.17)$$

となることが分かる。これを z について積分すると、

$$\bar{u} = \frac{u_*}{k} \ln z + C \quad (5.18)$$

が得られる。実際の地表面上では様々な凹凸があるので、 $z = 0$ で $\bar{u} = 0$ とはならない。そこでこの積分定数 C は、ある高さ $z = Z_{0m}$ で $\bar{u} = 0$ となるとして決められる。これより、

$$\bar{u} = \frac{u_*}{k} \ln \frac{z}{Z_{0m}} \quad (5.19)$$

となる。これが風速の対数分布 (logarithmic profile) である。この Z_{0m} は地表面の凹凸の程度を表す量で、風速分布に対する空気力学的粗度 (roughness parameter または roughness length) または地面粗度という。この式で表される対数分布は大気の中立成層のとき実際のプロファイルとよく一致している。

また、接地境界層内の渦粘性係数 K_{mz} は、(5.11) と (5.17) より、

$$K_{mz} = (kz)^2 \frac{u_*}{kz} = kz u_* \quad (5.20)$$

のように表すことができる。

²カルマン定数 k は、レイノルズ応力 $\tau = -\overline{\rho u'w'}$ と風速の鉛直分布の同時観測から $k = 0.4 \pm 0.01$ とされている (近藤純正「水環境の気象学」p99)

5.1.5 鉛直フラックス

運動量フラックスとバルク係数

接地境界層内では、鉛直フラックスは一定なので、地表面におけるフラックスを見積もるためには、接地境界層のある高さにおけるフラックスを見積もればよい。運動量のフラックス、すなわち地表面における風の応力は、

$$\tau_0 = -\overline{\rho u'' w''} = \rho u_*^2 = \rho \bar{u}^2 \left[\frac{k}{\ln \frac{z}{Z_{0m}}} \right]^2 = \rho C_m \bar{u}^2 \quad (5.21)$$

である。 \bar{u} は接地境界層内のある高さ（通常は 10m）における平均風を測定すればよい。また、

$$C_m = \left[\frac{k}{\ln \frac{z}{Z_{0m}}} \right]^2 \quad (5.22)$$

で定義される C_m は、無次元の量で、抵抗係数 (drag coefficient) または、運動量に対するバルク係数 (bulk transfer coefficient) という。

温位フラックス

接地境界層内では顕熱や潜熱の輸送量 (フラックス) H_s, H_L も高さによらないとしてよい。接地境界層内では乱れが、 u_* と z で決定されるとすると、これらについても運動量と同じ渦粘性係数 (5.20) を用いて (5.13) に現れる

$$K_{mz} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = \overline{w'' \theta''} \quad (5.23)$$

は、次のように表せる。

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = \frac{\overline{w'' \theta''}}{k z u_*} \quad (5.24)$$

地表面からの顕熱フラックス H_s [$\text{J m}^{-2} \text{s}^{-1}$] は、

$$H_s = -\rho C_p \overline{w'' \theta''} \quad (5.25)$$

で与えられる。ここで、

$$\theta_* = \frac{\overline{w'' \theta''}}{u_*} \quad (5.26)$$

で定義される温位スケール（摩擦温位） θ_* を導入すると、温位のフラックスは、

$$\frac{H_s}{\rho C_p} = -\overline{w''\theta''} = -kz \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} u_* = -\theta_* u_* \quad (5.27)$$

となる。ここで定義された θ_* も接地境界層では一定値である。これより、

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = \frac{\theta_*}{kz} \quad (5.28)$$

であるので、これを鉛直積分して、運動量の場合と同様に、 $\bar{\theta} = \theta_G$ となる高さを Z_{0h} とすると、

$$\bar{\theta} - \theta_G = \frac{\theta_*}{k} \ln \frac{z}{Z_{0h}} \quad (5.29)$$

となる。これを用いて温位フラックスを表すと、

$$\frac{H_s}{\rho C_p} = -\overline{w''\theta''} = -\theta_* u_* = -\frac{k}{\ln \frac{z}{Z_{0h}}} \frac{k}{\ln \frac{z}{Z_{0m}}} (\bar{\theta} - \theta_G) \bar{u} \quad (5.30)$$

となる。ここで、

$$\frac{H_s}{\rho C_p} = -\frac{k}{\ln \frac{z}{Z_{0h}}} \frac{k}{\ln \frac{z}{Z_{0m}}} (\bar{\theta} - \theta_G) \bar{u} = -C_h (\bar{\theta} - \theta_G) \bar{u} \quad (5.31)$$

として、

$$C_h = \frac{k}{\ln \frac{z}{Z_{0h}}} \frac{k}{\ln \frac{z}{Z_{0m}}} \quad (5.32)$$

のように顕熱または温位についてのバルク係数を定義することができる。

混合比フラックス

潜熱フラックス H_L

$$H_L = {}_lE = -\mathcal{L}_v \overline{w''q_v''} \quad (5.33)$$

も同様に、接地境界層内では一定と見なせるので、

$$\frac{\partial \bar{q}_v}{\partial z} = \frac{\overline{w'' q_v''}}{kz u_*} \quad (5.34)$$

である。ここで、 L は蒸発の潜熱である。これらより水蒸気混合比フラックスは、

$$E = -\overline{w'' q_v''} = -kz u_* \frac{\partial \bar{q}_v}{\partial z} \quad (5.35)$$

である。同様に、

$$q_{v*} = \frac{\overline{w'' q_v''}}{u_*} \quad (5.36)$$

で定義される混合比スケール（摩擦混合比） q_{v*} を導入すると、混合比のフラックスは、

$$E = -\overline{w'' q_v''} = -kz \frac{\partial \bar{q}_v}{\partial z} u_* = -q_{v*} u_* \quad (5.37)$$

と表わされる。ここで定義された q_{v*} も接地境界層では一定値である。これより、鉛直積分して、運動量や温位の場合と同様に、 $\bar{q}_v = q_{vsfc}$ となる高さを Z_{0h} とすると、

$$\bar{q}_v - q_{vsfc} = \frac{q_{v*}}{k} \ln \frac{z}{Z_{0h}} \quad (5.38)$$

となる。これを用いて混合比フラックスを表すと、

$$-\overline{w'' q_v''} = -q_{v*} u_* = -\frac{k}{\ln \frac{z}{Z_{0h}}} \frac{k}{\ln \frac{z}{Z_{0m}}} (\bar{q}_v - q_{vsfc}) \bar{u} \quad (5.39)$$

である。また、(5.32) で定義される温位のバルク係数 C_h と同じものを用いて、

$$-\frac{k}{\ln \frac{z}{Z_{0h}}} \frac{k}{\ln \frac{z}{Z_{0m}}} (\bar{q}_v - q_{vsfc}) \bar{u} = -C_h (\bar{q}_v - q_{vsfc}) \bar{u} \quad (5.40)$$

のように表すことができる。

以上で、大気境界層における、運動量、温位、水蒸気混合比の鉛直フラックスをバルク係数を用いて表すことができた。**CReSS**の地表面過程ではこのバルク係数を計算して、陸面と大気間の顕熱と潜熱の交換を記述する。また運動量フラックスを計算して地表面摩擦の効果を考慮する。

5.2 大気境界層・地表面過程・地温の計算

CRess の大気境界層・地表面過程・地温の計算は、基本的には Segami et al. (1989) にある JSM (Japan Spectral Model) で用いられていたものを用いており、すべて鉛直 1 次元のみの計算である。ただし、主な JSM との相違点として次のものがあげられる。

- 地中温度の計算において、JSM では 4 層のモデルを用いているが、*CRess* では任意の m 層を指定することができる。
- 地中温度の計算は、JSM では $n-1$ ステップから出発し、フラックスの温度に対する微分を用いた複雑な計算方式を用いているが、*CRess* では単純な陰解法とし連立方程式を解くだけである。
- 雲量は、JSM では相対湿度から Ohno and Isa (1983) の方法で見積もっているが、*CRess* では雲水と雲氷の混合比から見積もる。
- 地表面の顕熱・潜熱フラックスは、JSM では大気を先に計算し修正された温度と湿度を用いて地面の潜熱・顕熱フラックスを計算しているが、*CRess* では $n-1$ ステップの温度と水蒸気混合比から計算し、同じ値を大気と地面に与える。
- 鉛直拡散の計算は、JSM では毎ステップ毎に大気全層にわたって行なっており、この場合、地表面から大気に入ってきたフラックスは原理的には瞬間的に (時間ステップ Δt の間に) 大気上端まで影響することになるが、*CRess* ではサブグリッドスケールの拡散項の境界条件として与えるか、または、ユーザが指定した層内のみにおいて別途、鉛直拡散を計算する。
- 鉛直拡散の計算をする場合は、JSM と同様に、陰解法を用いて従属変数 (水平速度成分・温位・水蒸気混合比) の修正をする方法を用いている。

次に、大気境界層・地表面過程・地温のプロセスの大域的流れは以下の通りで、計算は水平の各格子点で鉛直 1 次元について独立に行なわれる。

- 雲量の計算の計算をする。通常は上、中、下層の雲量を求める。
- 太陽放射と下向長波長放射を計算する。
- 地表面の運動量、顕熱、潜熱フラックスの「係数」の計算する。
- 地表面のフラックスを求め、乱流拡散項の下層境界条件として与えるか、または、大気境界層過程の計算により、水平風速、温位、水蒸気混合比を修正する。
- 地温を計算する。

ここで、地表面過程では、まず、フラックスの「係数」を計算することが重要である。それは、地面は顕熱・潜熱フラックス、

$$H_S = -\rho_a C_p C_h |V_a| (T_a - T_G) \quad (5.41)$$

$${}_l E = -\rho_a \mathcal{L}_v C_h |V_a| \beta [q_{va} - q_{vs}(T_G)] \quad (5.42)$$

が外力として与えられるのに対して、大気では、温位フラックス³と混合比フラックス、

$$F_{\theta} = -\rho_a C_h |V_a| (\theta_{va} - \theta_{vG}) \quad (5.43)$$

$$F_{q_v} = -\rho_a C_h |V_a| \beta [q_{va} - q_{vs}(T_G)] \quad (5.44)$$

が地表面からの外力として与えられるからである。これらに共通する係数 $\rho_a C_h |V_a|$ (あとで詳述するように実際には温位と混合比について異なる) を計算し、大気境界層と地温の過程に受け渡す。そして、顕熱・潜熱フラックスは地温の過程で、温位と混合比の地表面のフラックスの効果は大気境界層の過程で取入れられる。

次節より、大気境界層・地表面過程・地温の計算に現れる各過程を順に説明する。

5.2.1 雲量

太陽放射は雲の効果により地表面に到達するが減少する。これを見積もるために雲量を用いる。ここでは、まず、雲量を相対湿度を用いて経験式から見積もる Ohno and Isa (1984) の方法を説明する。

雲量は無次元の量で、0~1 の値をとる。上層、中層、下層についてそれぞれ雲量を相対湿度の関数として与える。それぞれの高さは厳密なものではなく、大野・伊佐 (1984) では、上層を 400hPa、中層を 500 と 700hPa、下層を 850hPa としている。大まかに標高で表現すると、上層は 7~7.5km、中層は 5~6 および 3km、下層は 1.5km 付近に対応する。

雲量は大野・伊佐 (1984) の結果より、0~100% について、5% 毎に 21 個のデータで与えられている。各層の平均の相対湿度を \overline{Rh} [%] としたとき、

$$k_n = 1 + 20 \times \frac{\overline{Rh}}{100} \quad (5.45)$$

となる整数の k_n に対応して、次の表のように、下層 CD_L 、中層 CD_M 、上層 CD_H の雲量が与えられる。

CD_L	0.00,	0.00,	0.00,	0.00,	0.00,	0.00,	0.00,	0.00,	0.00,	0.00,	0.00,
	0.00,	0.00,	0.07,	0.11,	0.19,	0.40,	0.85,	1.00,	1.00,	1.00,	1.00
CD_M	0.00,	0.00,	0.00,	0.00,	0.00,	0.00,	0.00,	0.00,	0.00,	0.00,	0.00,
	0.00,	0.05,	0.12,	0.30,	0.40,	0.50,	0.70,	0.95,	1.00,	1.00,	1.00
CD_H	0.00,	0.00,	0.00,	0.00,	0.00,	0.00,	0.00,	0.00,	0.00,	0.05,	0.15,
	0.15,	0.30,	0.55,	0.75,	0.87,	0.95,	1.00,	1.00,	1.00,	1.00,	1.00

³ここでは温位の代りに仮温位を用いているが、フラックスは差に比例するので、どちらを用いても大きな違いにはならない。ただし CAPE などのような積分値については大きな差になることに注意しなければならない。

水蒸気混合比 q_v と気温 T_a から、相対湿度を求めるには、 q_v から水蒸気分圧 e_a を求め、Tetens (1930) の式から、その気温に対する飽和水蒸気圧を求めてその比をとる。

さて、大気の圧力、温度および水蒸気混合比を $p (= \bar{p} + p')$, T_a , q_v とすると、水蒸気分圧 e_a は、

$$e_a = \frac{q_v p}{\epsilon + (1 - \epsilon) q_v} \quad (5.46)$$

で与えられる。ここで、 ϵ は乾燥空気と水蒸気の分子量の比で、混合比が $[\text{kg kg}^{-1}]$ で与えられれば $\epsilon = 0.622$ であり、 $[\text{g kg}^{-1}]$ で与えられれば $\epsilon = 622.0$ となる。また気圧 p と水蒸気分圧 e_a の単位は $[\text{Pa}]$ である。

次に、飽和水蒸気圧を求める Tetens (1930) の式は、温度を T $[\text{°C}]$ (単位が摂氏であることに注意) とすると、その温度に飽和する飽和水蒸気圧 e_{as} $[\text{Pa}]$ が、 0°C の飽和水蒸気圧 e_s ($= 610.78 \text{ Pa}$) を用いて、

$$e_{as} = e_s \cdot 10^{\frac{a \cdot T}{b+T}} \quad (5.47)$$

または、

$$e_{as} = e_s \exp\left(\frac{a \cdot T}{b+T} \ln 10\right) \quad (5.48)$$

で与えられる。ここに出てくる定数 a, b は、次のように定義される。

	a	b
水面上で ($T \geq 0^\circ\text{C}$)	7.5	237.3
氷面上で ($T < 0^\circ\text{C}$)	9.5	265.3

これらより相対湿度 Rh は、

$$Rh = \frac{e_a}{e_{as}} \times 100 \quad (5.49)$$

と得られるので、これを用いて雲量を求めればよい。

上記の方法を用いると、実際の雲の分布に係わらず雲量が決まってしまう。**CReSS** においては水物質の混合比が計算されるので、これらを用いて雲量を見積もるのが適当である。そのために、先に述べた上・中・下層に対応するそれらの境界面の高さをそれぞれ z_L, z_M とし、次のように雲水総量 $[m^{-2}]$ 、

$$q_L = \int_{z_{sf c}}^{z_L} \rho (q_c + q_r + q_i + q_s + q_g) dz \quad (5.50)$$

$$q_M = \int_{z_L}^{z_M} \rho (q_c + q_r + q_i + q_s + q_g) dz \quad (5.51)$$

$$q_H = \int_{z_M}^{z_{top}} \rho (q_c + q_r + q_i + q_s + q_g) dz \quad (5.52)$$

を求め、これらと太陽放射の透過率の関係⁴から雲量を見積もる。

5.2.2 太陽放射・下向長波長放射

太陽放射（短波放射）と大気からの下向長波長放射は、雲量、太陽の天頂角、地表面付近の気温と水蒸気圧、および地表面アルベドの関数として計算される。

太陽放射および大気からの下向長波長放射の計算の概略は、次の通りである。

- 大気下層（第1層～第2層付近）の気温と水蒸気混合比 q_v から水蒸気分圧 e_a を求める。
- モデルの各格子点のその時刻における太陽の天頂角を求める。
- 水蒸気分圧 e_a と天頂角および雲量から下向短波放射を求める。このときアルベドを考慮する。
- 大気の温度 T_a と水蒸気分圧 e_a 、および雲量の関数として下向長波長放射を計算する。

以後、正味下向短波放射 RS^\downarrow と下向長波長放射 L^\downarrow のそれぞれについて説明する。

大気下層の水蒸気分圧

大気下層の水蒸気分圧を求めるには、大気第1層または下層のいくつかの層の平均の温度と水蒸気混合比⁵から、(5.46) を用いて水蒸気分圧を求める。

太陽の天頂角

太陽の天頂角は、1月1日からの日数 $jday$ 、地方時 T_{LC} 、およびその場所の緯度 lat の関数として計算される。

地方時は、世界標準時 UTC からの経度の関数として、

$$T_{LC} = UTC + lon/15 \quad (5.53)$$

で与えられ、また、太陽角 ϕ_s は、

$$\phi_s = 23.44 \cos(172 - jday) \quad (5.54)$$

⁴近藤 (2000)

⁵JSM の場合は大気第1層と第2層の平均値を用いている。

であり、これらより、太陽の天頂角 ζ は、

$$\zeta = \sin(\text{lat}) \sin(\phi_s) + \cos(\text{lat}) \cos(\phi_s) \cos[0.2618(T_{LC} - 12)] \quad (5.55)$$

のように求められる (図 5.1 を参照)。

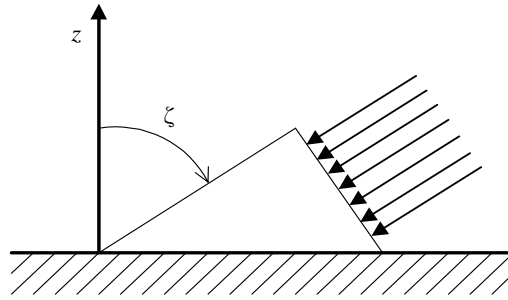


図 5.1. 天頂角 ζ

正味下向短波放射

地表面に到達する太陽放射を下向短波放射という。これは地表面のアルベド A_l によって決まる割合だけ反射されるので、その分を考慮しなければならない。これを正味下向短波放射といい、この量が地表面に与えられる。

地表面に到達する全日射量を知るためには、まず大気の上端に到達する日射量を求める必要がある。それを S_∞ とすれば、

$$S_\infty = S_0 \cos \zeta \quad (S_0 = 1,367 \text{ [W m}^{-2}\text{]} : \text{太陽定数}) \quad (5.56)$$

である⁶。ここで、 ζ は太陽の天頂角である。このとき、晴天時の日射量は、

$$a = 1.12 - b - 0.06 \log_{10} e_a \quad (1 \leq e_a \leq 3000 \text{ [Pa]} : \text{地表面付近の水蒸気圧}) \quad (5.57)$$

$$b = 0.43 + 0.00016e_a \quad (5.58)$$

として、次のようになる。

$$S^\downarrow = \begin{cases} S_\infty (a + b \times 10^{-0.13 \sec \zeta}) & \cos \zeta > 0 \\ 0 & \cos \zeta \leq 0 \end{cases} \quad (5.59)$$

⁶正確には $S_\infty = S_0 (\bar{r}_E / r_E)^2 \cos \zeta$ 。 r_E は地球と太陽との距離、 \bar{r}_E はその平均である。

さらに雲の効果を取り入れ、アルベドを考慮すると、地表面に吸収される正味下向短波放射は、

$$RS^\downarrow = (1 - A_l)S^\downarrow(1 - cd_L \cdot CD_L)(1 - cd_M \cdot CD_M)(1 - cd_H \cdot CD_H) \quad (5.60)$$

である。ただし、

cd_L	低層雲による吸収と反射の効果	0.7
cd_M	中層雲による吸収と反射の効果	0.6
cd_H	高層雲による吸収と反射の効果	0.3

である。先に述べたように雲量は相対湿度を用いて、経験式によって計算される (Ohno and Isa, 1984)。またアルベド A_l の数値は以下の通りである。

陸面	データから与える
海氷面・雪面	0.6 で一定とする

海面については、計算期間中は海面水温一定としているので、日射を考慮する必要はない。このためアルベドの値を設定しなくてもよい。

地表面における大気からの下向長波長放射

Kondo (1976) の実験式から、雲と水蒸気の効果を取り入れた大気からの下向長波長放射は、

$$L^\downarrow = \varepsilon_G \sigma T_a^4 [1 + (-0.49 + 0.0066\sqrt{e_a})(1 - CD \cdot C \cdot A_c)] \quad (5.61)$$

である。ここで、 T_a は大気下層の気温で、大気第1層の気温または下層2~3層の平均気温である⁷。また、

$$C = 0.75 - 0.005e_a \quad (5.62)$$

$$A_c = \frac{CD_L + 0.85CD_M + 0.5CD_H}{CD} + 0.1 \frac{N_r}{N} \quad (5.63)$$

$$CD = CD_L + CD_M + CD_H \quad (5.64)$$

である⁸。さらに、ここで使用されている定数は以下のとおりである。

ε_G	赤外域における地表面の射出率 (emissivity)	0.95	
σ	Stefan-Boltzman 定数	5.67×10^{-8}	$\text{W m}^{-2}\text{K}^{-4}$

⁷JSM では大気下層の第1層と第2層の平均を用いている。

⁸ N_r/N は降水時間の出現比率を示し、時間積分を行なう場合、放射計算の時間ステップ間に降水がなければ0、ずっと降水があれば1となる。しかし、JSM では常に0としている。これが良いのかはわからない。

5.2.3 地表面フラックス

地表面における運動量フラックス τ_x, τ_y [$\text{kg m s}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1} = \text{N m}^{-2}$] は、バルク係数と風速の絶対値を用いて、

$$\tau_x = \rho_a C_m |V_a| u_a \quad (5.65)$$

$$\tau_y = \rho_a C_m |V_a| v_a \quad (5.66)$$

のように、また、顕熱・潜熱フラックス $H_S, {}_lE$ [$\text{J m}^{-2} \text{ s}^{-1} = \text{W m}^{-2}$] は、

$$H_S = -\rho_a C_p C_h |V_a| (T_a - T_G) \quad (5.67)$$

$${}_lE = -\rho_a \mathcal{L}_v C_h |V_a| \beta [q_{va} - q_{vs}(T_G)] \quad (5.68)$$

のように与えられる。ここで、 a と G は大気第1層と地表面（地温第1層）を意味する。また、 C_m は運動量についての、 C_h は熱と水蒸気についてのバルク係数（無次元）、 $q_{vs}(T_G)$ は地温 T_G に対する飽和混合比、 β は蒸発散係数、 \mathcal{L}_v は水の蒸発の潜熱である。これらを大気密度をかけた温位フラックス F_θ [$\text{kg K m}^{-2} \text{ s}^{-1}$] と水蒸気混合比フラックス F_{q_v} [$\text{kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$] に直すと、

$$\begin{aligned} F_\theta &= \frac{H_S}{C_p} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\beta}{C_p}} = -\rho_a C_h |V_a| (\theta_{va} - \theta_{vG}) \\ &= -\rho_a u_* \theta_* \end{aligned} \quad (5.69)$$

$$\begin{aligned} F_{q_v} &= E = -\rho_a C_h |V_a| \beta [q_{va} - q_{vs}(T_G)] \\ &= -\rho_a u_* q_{v*} \end{aligned} \quad (5.70)$$

となる。ここで、 θ_* は温位スケール（摩擦温位）、 q_{v*} は混合比スケール（摩擦混合比）である。 u_* は摩擦速度で、

$$u_*^2 = C_m |V_a|^2 \quad (5.71)$$

のように定義され、ここに出てくる $|V_a|$ は地表風速の絶対値で、

$$|V_a| = (u_a^2 + v_a^2)^{\frac{1}{2}} \quad (5.72)$$

である。また、仮温位 θ_v は、

$$\theta_v = \frac{1 + \epsilon_{iv} q_v}{1 + q_v} \theta \quad (5.73)$$

のように与えられる。 ϵ_{iv} は、乾燥空気と水蒸気の分子量の比である。

さて、無次元のバルク係数 C_m, C_h は、運動量、熱、水蒸気の粗度 (roughness parameter) 考慮して、Louis et al. (1980) のスキームを用いて表現される。それは、次のように与えられる。

$$C_m = \left[\frac{k}{\ln\left(\frac{z_a}{Z_{0m}}\right)} \right]^2 f_m(Ri, z_a, Z_{0m}) \quad (5.74)$$

$$C_h = \frac{k}{\ln\left(\frac{z_a}{Z_{0m}}\right)} \frac{k}{\ln\left(\frac{z_a}{Z_{0h}}\right)} f_h(Ri, z_a, Z_{0m}, Z_{0h}) \quad (5.75)$$

ここで $k (=0.4)$ はカルマン定数、 z_a は大気第1層の高さ、 Z_{0m} は運動量の粗度、 Z_{0h} は熱と水蒸気の粗度、 Ri は Richardson 数である。バルク係数にかかる係数 f_m, f_h も粗度と Richardson 数の関数で、次のように与えられる。

不安定な場合 ($Ri < 0$)、

$$f_m = 1 - \frac{2b \cdot Ri}{1 + 3bc \left[\frac{k}{\ln\left(\frac{z_a}{Z_{0m}}\right)} \right]^2 \left(-\frac{Ri \cdot z_a}{Z_{0m}} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.76)$$

$$f_h = 1 - \frac{3b \cdot Ri}{1 + 3bc \frac{k}{\ln\left(\frac{z_a}{Z_{0m}}\right)} \frac{k}{\ln\left(\frac{z_a}{Z_{0h}}\right)} \left(-\frac{Ri \cdot z_a}{Z_{0h}} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.77)$$

$$b = c = 5 \quad (5.78)$$

安定な場合 ($Ri > 0$)、

$$f_m = \frac{1}{1 + 2b \cdot Ri \cdot \sqrt{1 + d \cdot Ri}} \quad (5.79)$$

$$f_h = \frac{1}{1 + 3b \cdot Ri \cdot \sqrt{1 + d \cdot Ri}} \quad (5.80)$$

$$b = d = 5 \quad (5.81)$$

ここで、運動量と熱・水蒸気についての粗度、 Z_{0m} , Z_{0h} は次のように与えられ、海面の粗度は計算の各ステップ毎に修正される。

粗度	陸面	海面	海氷面・雪面
Z_{0m}	データセットから与える	u_* の関数として計算する	任意の一定値
Z_{0h}	一定値 (0.1 m)	Z_{0m} と同じとする	Z_{0m} と同じとする。

以上を踏まえ、地表面フラックスの具体的な計算は以下のとおりとなる。

(1) 水平速度の絶対値の計算

大気第1層の水平速度 (u_a, v_a) から、(5.72) より、その絶対値 $|V_a|$ を計算する。

(2) 地表面の温度に対応する飽和水蒸気混合比の計算

陸面であれば地温第1層、海面であれば海面水温に対応する飽和水蒸気混合比 $q_{vs}(T_G)$ を、Tetens (1930) の式 (5.47) または (5.48) から求める。

Tetens (1930) の式から求めた飽和水蒸気分圧から、飽和水蒸気混合比 $[\text{kg kg}^{-1}]$ は、

$$q_{vs}(T_G) = \epsilon \frac{e_{as}}{p} \quad (5.82)$$

で与えられる。これは本来比湿の定義式であるが、混合比とみなしても誤差は十分小さい。なお、ここで、 $p = \bar{p} + p'$ で、 ϵ は乾燥空気と水蒸気の分子量の比である。

(3) 地表面の水蒸気混合比を定義する

陸面、海面、海氷面・雪面に対して、地表面の水蒸気混合比を定義する。陸面に対してのみデータから与えられる蒸発散効率 β を考慮して、

陸面に対して、

$$q_{vsfc} = \beta [q_{vs}(T_G) - q_{va}] + q_{va} \quad (5.83)$$

海面、海氷面・雪面に対して、

$$q_{vsfc} = q_{vs}(T_G) \quad (5.84)$$

のようになる。

(4) Richardson 数の計算

地表面の安定度を判別するため、また、Louis et al. (1980) のスキームにおいて f_m, f_h の計算に用いるため、地表面の Richardson 数を計算しておく。

Richardson 数 Ri は以下のように計算される。

$$Ri = \frac{gz_a \Delta\theta_v}{\theta_{va} |V_a|^2} \quad (5.85)$$

ここで、 ϵ_{iv} を乾燥空気と水蒸気の分子量の比として、

$$\theta_{vG} = T_G \frac{1 + \epsilon_{iv} q_{vsfc}}{1 + q_{vsfc}} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}} \quad (5.86)$$

$$\Delta\theta_v = \theta_{va} - \theta_{vG} \quad (5.87)$$

であり、また、 z_a は大気第1層の高さ、 g は重力加速度である。

(5) 第1ステップのときの海面の Z_{0m} と u_* をイタレーションで求める

陸面の粗度は Z_{0m}, Z_{0h} ともに計算期間中一定値をとるが、海面における粗度は、その風速依存性を考慮するためにイタレーションで、摩擦速度 u_* とともに求める。このようにイタレーションで計算するのは第1ステップのみで、以降は一つ前のステップの摩擦速度 u_*^{n-1} から Z_{0m} を計算しておく。また、海面では、熱と水蒸気の粗度 Z_{0h} は運動量についての粗度 Z_{0m} と同じとする。

具体的には、海面では Kondo (1975) の関係式を用いて、 Z_{0m} を u_* の関数として次のように与える。

$$Z_{0m} = -34.7 \times 10^{-6} + 8.28 \times 10^{-4} u_* \quad \text{for } u_* \leq 1.08 \text{ [m s}^{-1}] \quad (5.88)$$

$$Z_{0m} = -0.277 \times 10^{-2} + 3.39 \times 10^{-3} u_* \quad \text{for } u_* > 1.08 \text{ [m s}^{-1}] \quad (5.89)$$

なお、 Z_{0m} の最小値は 1.5×10^{-5} m とする。 u_* は (5.71) より、

$$u_* = |V_a| \sqrt{C_m} \quad (5.90)$$

で求められる。また、そのバルク係数 C_m は (5.74) で与えられるが、それにかかる係数 f_m は、(5.85) で与えられる Richardson 数により場合分けされて、不安定の場合は (5.76) から、安定の場合は (5.79) から決められる。

これにより摩擦速度 u_* が決まるので、これを (5.88) または (5.89) に与えて、 Z_{0m} を決める。さらに、この粗度を用いて上記の計算を繰り返し、 Z_{0m}, u_* が収束するまでこのイタレーションを行う。その結果、海面の Z_{0m}, u_* を決めることができる。

(6) 全領域の f_m, f_h の計算

海面の運動量についての粗度 Z_{0m} が (5) で求められた。また、上の熱と水蒸気についての粗度 Z_{0h} は $Z_{0h} = Z_{0m}$ とする。さらに、陸面については、運動量についての粗度 Z_{0m} はデータから与えられ、熱と水蒸気についての粗度 Z_{0h} は一定値 0.1m とし、海氷面・雪面については、運動量・熱と水蒸気の粗度を共に一定値とする。

これにより、全領域の運動量、熱・水蒸気についての粗度が決まったので、Richardson 数 (5.85) と粗度の関数として、バルク係数にかかる Louis et al. (1980) のスキームに現れる係数 f_m, f_h を、(5.76), (5.77), (5.79), (5.80) に基づいて計算する。

(7) 全領域のバルク係数 C_m, C_h の計算

(5), (6) で求めた f_m, f_h と粗度 Z_{0m}, Z_{0h} を用いて、(5.74), (5.75) から、バルク係数 C_m, C_h を求める。

(8) 全領域の摩擦速度 u_* の計算

運動量のバルク係数 C_m と $|V_a|$ から、(5.90) により、摩擦速度 u_* を全領域について求める。

(9) Kondo(1975) の温位、混合比フラックスの補正項の計算

海面の水蒸気と熱のフラックスを計算するときに Kondo (1975) の補正項を用いるので、ここでそれを求めておく。

correction factor B_h^{-1}, B_e^{-1} について、Kondo (1975) は観測から以下の式、

海面について、

$$B_h^{-1} = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{\nu + ku_* Z_{0m}}{D_a} \right) \quad (5.91)$$

$$B_e^{-1} = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{\nu + ku_* Z_{0m}}{D_v} \right) = B_h^{-1} + \frac{1}{k} \ln \left(\frac{D_a}{D_v} \right) \quad (5.92)$$

または、

$$B_h^{-1} = \frac{1}{k} \ln (0.71 + 4.64 \times 10^4 ku_* Z_{0m}) \quad (5.93)$$

$$B_e^{-1} = B_h^{-1} - 0.168 \frac{1}{k} \quad (5.94)$$

陸面、海氷面・雪面について、

$$B_h^{-1} = 0 \quad (5.95)$$

$$B_e^{-1} = 0 \quad (5.96)$$

を提案している。ここで、 ν は空気の動粘性係数 (kinetic viscosity) [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$]、 \mathcal{D}_a は空気の拡散係数 [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$]、 \mathcal{D}_v は水蒸気の拡散係数 [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$]である^{9 10}。

(10) 温位と水蒸気混合比のフラックス係数の計算

ここで、温位と水蒸気混合比のフラックスを計算しやすくするために、そこに現れる係数 E_θ, E_{q_v} を計算しておく。

$$E_\theta = \frac{\theta_*}{\theta_{va} - \theta_{vG}} = \left[\frac{u_*}{C_h |V_a|} + B_h^{-1} \right]^{-1} \quad (5.103)$$

$$E_{q_v} = \frac{q_{v*}}{q_{va} - q_{vsfc}} = \left[\frac{u_*}{C_h |V_a|} + B_e^{-1} \right]^{-1} \quad (5.104)$$

これを用いることにより、水蒸気と熱のフラックスを同じバルク係数 C_h で表現していたのが、 B_h^{-1}, B_e^{-1} を取り入れることで、海面については異なるものとなる。ただし陸面や海氷面・雪面についてはこれらは0であるので、同じになる。

(11) フラックスの計算

以上の準備から、地表面の運動量、顕熱、潜熱、温位、水蒸気混合比のフラックスを次のように与えることができる。

まず、運動量フラックスの絶対値は、

$$\tau = \rho_a u_*^2 \quad (5.105)$$

⁹空気の動粘性係数 ν [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$] については、

$$\nu = \nu_0 \frac{101325}{p} \left(\frac{T}{273.16} \right)^{1.754} \quad (5.97)$$

$$\nu_0 = 1.328 \times 10^{-5} \quad (5.98)$$

空気の拡散係数 \mathcal{D}_a [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$] については、

$$\mathcal{D}_a = \mathcal{D}_{a0} \frac{101325}{p} \left(\frac{T}{273.16} \right)^{1.78} \quad (5.99)$$

$$\mathcal{D}_{a0} = 1.87 \times 10^{-5} \quad (5.100)$$

水蒸気の拡散係数 \mathcal{D}_v [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$] については、

$$\mathcal{D}_v = \mathcal{D}_{v0} \frac{101325}{p} \left(\frac{T}{273.16} \right)^{1.81} \quad (5.101)$$

$$\mathcal{D}_{v0} = 2.23 \times 10^{-5} \quad (5.102)$$

のように与えられる (近藤純正「水環境の気象学」p130) が、文章中に示した、近似式を使用するのでよい。

¹⁰ B_h を低層スタントン数、 B_e を低層ダルトン数という (大気科学講座 1 P95)。

また、その x と y 成分は、

$$\tau_x = \tau \frac{u_a}{|V_a|} \quad (5.106)$$

$$\tau_y = \tau \frac{v_a}{|V_a|} \quad (5.107)$$

である。次に、顕熱フラックス H_S と潜熱フラックス ${}_lE$ は、

$$H_S = -\rho_a C_p u_* E_\theta (T_a - T_G) \quad (5.108)$$

$${}_lE = -\rho_a \mathcal{L}_v u_* E_{q_v} (q_{va} - q_{vsfc}) \quad (5.109)$$

であり、大気密度をかけた温位フラックス F_θ [$\text{kg K m}^{-2} \text{s}^{-1}$] と水蒸気混合比フラックス F_{q_v} [$\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$] に直すと、

$$F_\theta = -\rho_a u_* E_\theta (\theta_{va} - \theta_{vG}) \quad (5.110)$$

$$F_{q_v} = -\rho_a u_* E_{q_v} (q_{va} - q_{vsfc}) \quad (5.111)$$

となる。陸面については、(5.83) から $q_{va} - q_{vsfc} = \beta [q_{va} - q_{vs}(T_G)]$ であるから、(5.109) と (5.111) には、蒸発散効率 β が q_{vsfc} を通して含まれている。

以上が地表面フラックスの計算であるが、実際に (5.108) と (5.109) の計算をするのは、地温の計算プロセスである。また、(5.110) と (5.111) の計算をするのは、大気境界層の計算プロセスである。このため、このプロセスから返すのはこれらの式に共通な係数で、

$$C_w = \rho_a u_*^2 \frac{1}{|V_a|} \quad (5.112)$$

$$C_\theta = \rho_a u_* E_\theta \quad (5.113)$$

$$C_{q_v} = \rho_a u_* E_{q_v} \quad (5.114)$$

の3つの係数と、陸面では蒸発散係数 β を考慮した地表の混合比 q_{vsfc} である。これらを用いると、運動量フラックスの x, y 成分と温位および混合比のフラックスは、次のように表わすことができる。

$$\tau_x = C_w u_a \quad (5.115)$$

$$\tau_y = C_w v_a \quad (5.116)$$

$$F_\theta = C_\theta (\theta_{va} - \theta_{vG}) \quad (5.117)$$

$$F_{q_v} = C_{q_v} (q_{va} - q_{vsfc}) \quad (5.118)$$

もし、大気境界層過程の計算で陰解法を用いないのであれば、これらの係数の代わりに、運動量、顕熱、潜熱、温位、混合比のフラックスを返してもよい。

(12) 地表面のモニターデータの計算

地上の温度や風速は、地表面の物理量の観測値と比較する上で重要である。地表面に接している接地境界層は等フラックス層とも呼ばれ、ここでは鉛直フラックスが高度によらず一定になる。この性質を利用して、気温と水蒸気混合比については地表から 1.5m、速度については 10m の値をモニター用として計算する。

計算の方法は簡単である。 u_* はすでに求められているものを用い、高さ 10m の風速は、(5.71) または (5.90) より、

$$|V_{a10}| = \frac{u_*}{\sqrt{C_{m10}}} \quad (5.119)$$

である。 C_{m10} は、(5.74)~(5.80) で $z_a = 10$ として、 f_m, C_m を計算したものをを用いる。また、その x と y 成分は接地境界層内では風向は鉛直に変化しないとしているので、次のようになる。

$$u_{x10} = |V_{a10}| \frac{u_a}{|V_a|} \quad (5.120)$$

$$v_{y10} = |V_{a10}| \frac{v_a}{|V_a|} \quad (5.121)$$

気温と水蒸気混合比については $z_a = 1.5$ として、同様に (5.74)~(5.80) から、 f_m, C_m の計算をする。その結果得られた高さ 1.5m におけるバルク係数 $C_{m1.5}$ と摩擦速度 u_* を用いて、

$$|V_{a1.5}| = \frac{u_*}{\sqrt{C_{m1.5}}} \quad (5.122)$$

から、高さ 1.5m における風速を求めておく。同時に温位と混合比についての高さ 1.5m におけるバルク係数 $C_{h1.5}$ を求めておく。これらを用いて、(5.103) と (5.104) から、

$$E_{\theta 1.5} = \left[\frac{u_*}{C_{h1.5}|V_{a1.5}|} + B_h^{-1} \right]^{-1} \quad (5.123)$$

$$E_{q_v 1.5} = \left[\frac{u_*}{C_{h1.5}|V_{a1.5}|} + B_e^{-1} \right]^{-1} \quad (5.124)$$

となり、簡単な計算により、高さ 1.5m の仮温位 $\theta_{v1.5}$ は、大気第 1 層と地温の仮温位 θ_{va}, θ_{vG} と、

$$\frac{\theta_{v1.5} - \theta_{vG}}{\theta_{va} - \theta_{vG}} = \frac{E_{\theta}}{E_{\theta 1.5}} \quad (5.125)$$

の関係があることが示される。これより、高さ 1.5m の仮温位は、

$$\theta_{v1.5} = \theta_{vG} + (\theta_{va} - \theta_{vG}) \frac{E_{\theta}}{E_{\theta1.5}} \quad (5.126)$$

のように与えられる。

水蒸気混合比についても同様に、簡単な計算から、高さ 1.5m の混合比 $q_{v1.5}$ は、大気第 1 層と地表の混合比 q_{va}, q_{vsfc} と、

$$\frac{q_{va1.5} - q_{vsfc}}{q_{va} - q_{vsfc}} = \frac{E_{qv}}{E_{qv1.5}} \quad (5.127)$$

の関係があることが示される。これより、高さ 1.5m の混合比 $q_{va1.5}$ は、

$$q_{va1.5} = q_{vsfc} + (q_{va} - q_{vsfc}) \frac{E_{qv}}{E_{qv1.5}} \quad (5.128)$$

のように与えられる。これにおいても q_{vsfc} に蒸発散係数の効果が含まれる。

(13) 次のステップのための海面の粗度 Z_{0m} の計算

この計算ルーチンの最後に、次のステップで用いる海面の運動量にかかわる粗度 Z_{0m} を計算しておく。計算は現在求められている摩擦速度 u_* から、海面についてののみ (5.88) と (5.89) を用いて海面の Z_{0m} を計算し、次のステップまで保存しておく。

5.2.4 大気境界層過程

地表から大気に入った運動量や顕熱・潜熱は、鉛直拡散により上方に伝えられる。拡散は乱流によって起こるので、運動量フラックスと温位・水蒸気混合比フラックスは基礎方程式系におけるサブグリッドスケールの拡散項、

$$G^{\frac{1}{2}} \text{Turb.}u = G^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial z} \right) \quad (5.129)$$

$$G^{\frac{1}{2}} \text{Turb.}v = G^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial z} \right) \quad (5.130)$$

$$G^{\frac{1}{2}} \text{Turb.}\theta = G^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial H_{\theta 1}}{\partial x} + \frac{\partial H_{\theta 2}}{\partial y} + \frac{\partial H_{\theta 3}}{\partial z} \right) \quad (5.131)$$

$$G^{\frac{1}{2}} \text{Turb.}q_v = G^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial H_{qv1}}{\partial x} + \frac{\partial H_{qv2}}{\partial y} + \frac{\partial H_{qv3}}{\partial z} \right) \quad (5.132)$$

の下層境界条件として、鉛直方向の応力 τ_{13} , τ_{23} と温位・水蒸気フラックス $H_{\theta 3}$, $H_{q_v 3}$ に対して、次のように与えられる。

$$t_{13}(z = z_a) = C_w u_a \quad (5.133)$$

$$t_{23}(z = z_a) = C_w v_a \quad (5.134)$$

$$H_{\theta 3}(z = z_a) = C_\theta (\theta_{va} - \theta_{vG}) \quad (5.135)$$

$$H_{q_v 3}(z = z_a) = C_{q_v} (q_{va} - q_{vsfc}) \quad (5.136)$$

なお、サブグリッドスケールの拡散項が計算されない場合には、ユーザーが指定した高さまで鉛直1次元の拡散を計算し、大気境界層過程を表現する。鉛直拡散は地表から離れるほど小さくなるので、その指定はある程度拡散が及ぶ高さが与えられていればよい。大気境界層過程の鉛直拡散も、基本的には Segami et al. (1989) にある JSM で用いられていた Mellor and Yamada (1974) の turbulent closure model の level 2 を用いており、すべて鉛直1次元のみの計算である。

さて、鉛直1次元の拡散の方程式は、 z 座標系で以下のように表される。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho K_m \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (5.137)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho K_m \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (5.138)$$

$$\frac{\partial \theta_v}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho K_h \frac{\partial \theta_v}{\partial z} \right) \quad (5.139)$$

$$\frac{\partial q_v}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho K_h \frac{\partial q_v}{\partial z} \right) \quad (5.140)$$

ここでは乱流混合係数に $K_0 = 1.0 [\text{m}^2 \text{s}^{-1}]$ を加えたものを用いた。すなわち、

$$K_m = K_0 + l^2 \left| \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \right| S_m \quad (5.141)$$

$$K_h = K_0 + l^2 \left| \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \right| S_h \quad (5.142)$$

である。ここで、 S_m, S_h は flux Richardson number の関数 (Mellor and Yamada, 1974)、また、長さスケール l は、

$$l = \frac{kz}{1 + \frac{kz}{l_0}} \quad (5.143)$$

のように与えられる。なお、 k はカルマン定数、 l_0 は長さスケールの基準であり、 E を乱流運動エネルギーとして、

$$l_0 = 0.10 \times \frac{\int_{z_{sfc}}^{\infty} \rho E z dz}{\int_{z_{sfc}}^{\infty} \rho E dz} \quad (5.144)$$

のように与えられる（しかし、ここでの説明において、乱流運動エネルギーは計算しないとしているので、実際には大気安定度の関数としている）。

以上を踏まえて、鉛直1次元の拡散方程式による大気境界層過程の具体的な計算方法は、以下のとおりとなる。

(1) 格子間レベルの大気密度の計算

差分化の際に必要な、鉛直の各格子間レベルの大気密度 ρ_k^w を求めておく（図 5.2 を参照）。

(2) 鉛直シアアの2乗の計算

鉛直シアアの絶対値は、次の Richardson 数の計算やフラックスの計算に用いるのでここで計算しておく。それは次のとおりである。

$$\left| \frac{\partial \mathbf{V}_k}{\partial z} \right|^2 = \left(\frac{\partial u_k}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_k}{\partial z} \right)^2 \quad (5.145)$$

(3) gradient Richardson 数

Mellor and Yamada (1974) の level 2 では flux Richardson 数 R_f を gradient Richardson 数 R_i の関数として与える。それは、次のように定義される。

$$R_i = \frac{g \frac{\partial \theta_v}{\partial z}}{\bar{\theta}_v \left| \frac{\partial \mathbf{V}_k}{\partial z} \right|^2} \quad (5.146)$$

ここで、 $\bar{\theta}_v = \frac{1}{2}(\theta_{vk+1} + \theta_{vk})$ である。

(4) flux Richardson 数

Mellor and Yamada (1974) に従い、flux Richardson 数 R_f を次のように与える。

$$R_f = 0.725 \left(R_i + 0.186 - \sqrt{R_i^2 - 0.316 R_i + 0.0346} \right) \quad (5.147)$$

(5) \tilde{S}_H, \tilde{S}_M を求める

Mellor and Yamada (1974) で用いられるいくつかの定数は、次の通りである。

A_1	A_2	B_1	B_2	C_1
0.78	0.78	15.0	8.0	0.056

であり、これらの値を用いて、次の定数を求める。

$$\gamma_1 \equiv \frac{1}{3} - \frac{2A_1}{B_1} = 0.2293333 \quad (5.148)$$

$$\gamma_2 \equiv \frac{B_2}{B_1} + \frac{6A_1}{B_1} = 0.8453333 \quad (5.149)$$

また、flux Richardson 数を用いて、

$$\Gamma \equiv \frac{R_f}{1 - R_f} \quad (5.150)$$

を定義すると、結局 \tilde{S}_H, \tilde{S}_M は、次のように与えられる。

$$\tilde{S}_H = 3A_2(\gamma_1 - \gamma_2\Gamma) \quad (5.151)$$

$$\tilde{S}_M = 3A_1(\gamma_1 - \gamma_2\Gamma) \frac{\gamma_1 - C_1 - (6A_1 + 3A_2)\frac{\Gamma}{B_1}}{\gamma_1 - \gamma_2\Gamma + 3A_1\frac{\Gamma}{B_1}} \quad (5.152)$$

さて、これらは、実際の計算ではもっと簡単化することができる。 Γ を消去して $A_1 = A_2$ を考慮すると、

$$\tilde{S}_H = 3A_2 \frac{\gamma_1 - (\gamma_1 + \gamma_2)R_f}{1 - R_f} \quad (5.153)$$

$$\tilde{S}_M = \tilde{S}_H \frac{X_1 - X_2R_f}{X_3 - X_4R_f} \quad (5.154)$$

のように、便利な形式となる。なお、ここで現れた定数は、次のとおりである。

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 1.074667 \quad (5.155)$$

$$3A_2 = 2.34 \quad (5.156)$$

$$X_1 = 0.173333 \quad (5.157)$$

$$X_2 = 0.641333 \quad (5.158)$$

$$X_3 = 0.229333 \quad (5.159)$$

$$X_4 = 0.918667 \quad (5.160)$$

(6) S_H, S_M を求める

先に求めた \tilde{S}_H, \tilde{S}_M から S_H, S_M を計算する。 S_H, S_M の両方に共通するファクターとして、

$$S_e = \sqrt{B_1(1 - R_f) \left| \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \right|^2 \tilde{S}_M} \quad (5.161)$$

を定義しておく、次のように表わすことができる。

$$S_H = S_e \tilde{S}_H \quad (5.162)$$

$$S_M = S_e \tilde{S}_M \quad (5.163)$$

(7) 長さスケールの基準 l_0 の計算

Mellor and Yamada (1974) では長さスケールの基準 l_0 は、乱流運動エネルギー E の関数として (5.144) により計算される。しかし、ここでは乱流運動エネルギーは計算されない、大気安定度による場合分けをして、以下のようにする。

$$l_0 = 100 \text{ [m]}, \quad (R_i \leq 0) \quad (5.164)$$

$$l_0 = 30 \text{ [m]}, \quad (R_i \geq 0) \quad (5.165)$$

(8) 長さスケールの l の計算

長さスケールの l は、(5.143) によって与えられる。それは次のとおりである。

$$l = \frac{z}{\frac{1}{k} + \frac{z}{l_0}} \quad (5.166)$$

(9) K_m, K_h の計算

K_m, K_h は、(5.141) と (5.142) で定義されているが、上記の計算における S_M, S_H には既に鉛直シアアの絶対値がかかっている、次のように書き換える。

$$K_m = K_0 + l^2 S_M \quad (5.167)$$

$$K_h = K_0 + l^2 S_H \quad (5.168)$$

ここで、 $K_0 = 1.0 \text{ [m}^2 \text{ s}^{-1}\text{]}$ である。

(10) 鉛直の拡散方程式の差分法

以上で、大気境界層内の K_m, K_h の鉛直分布が格子間レベルで求められたので、鉛直方向の拡散方程式 (5.137)~(5.140) を解いて、陽解法の場合には時間変化率、陰解法の場合には修正値 (積分値) を求める。

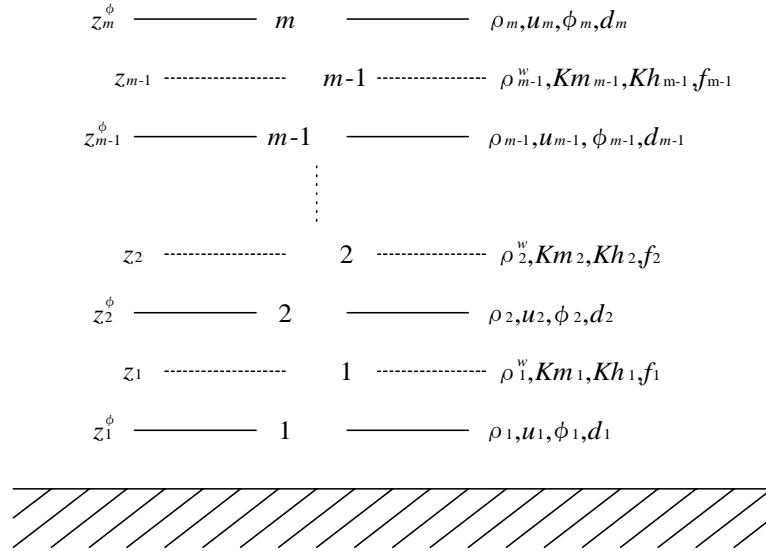


図 5.2. 大気境界層過程の計算に用いる鉛直格子の設定。

これらの式を、図 5.2 に示した配置で離散化すると次のようになる。

$$\frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{\rho_k} \frac{1}{z_k - z_{k-1}} \left(\rho_k^w K_{m_k} \frac{u_{k+1}^N - u_k^N}{z_{k+1}^\phi - z_k^\phi} - \rho_{k-1}^w K_{m_{k-1}} \frac{u_k^N - u_{k-1}^N}{z_k^\phi - z_{k-1}^\phi} \right) \quad (5.169)$$

$$\frac{\phi_k^n - \phi_k^{n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{\rho_k} \frac{1}{z_k - z_{k-1}} \left(\rho_k^w K_{m_k} \frac{\phi_{k+1}^N - \phi_k^N}{z_{k+1}^\phi - z_k^\phi} - \rho_{k-1}^w K_{m_{k-1}} \frac{\phi_k^N - \phi_{k-1}^N}{z_k^\phi - z_{k-1}^\phi} \right) \quad (5.170)$$

なお、ここでは、速度成分の代表として u_k^n 、スカラーの代表として ϕ_k^n (下付添字 k は鉛直レベルの格子番号、上付き添字 n は時間ステップ) を用いている。また、以降の差分式の右辺に現れる N については、 $N = n - 1$ のとき陽解法の離散化となり $N = n$ のとき陰解法の離散化となる。

地表面フラックスの係数、つまり、(5.112) の C_w 、(5.113) の C_θ と (5.114) の C_q は、大気第 1 層 ($k = 1$) のときに用いられ、

$$\frac{u_1^n - u_1^{n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{\rho_1} \frac{1}{z_1} \left[\rho_1^w K_{m_1} \frac{u_2^N - u_1^N}{z_2^\phi - z_1^\phi} - C_w (u_1^N - u_{sfc}^N) \right] \quad (5.171)$$

$$\frac{\phi_1^n - \phi_1^{n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{\rho_1} \frac{1}{z_1} \left[\rho_1^w K_{m_1} \frac{\phi_2^N - \phi_1^N}{z_2^\phi - z_1^\phi} - C_\phi (\phi_1^N - \phi_{sfc}^N) \right] \quad (5.172)$$

となる。ここで、スカラー量は ϕ で代表されている。また、地表面における風速は、

$$u_{sfc}^N = 0 \quad (5.173)$$

である。

これらの式においては、 $z_0 = 0$ とすることで、記号、

$$d_k = \frac{1}{\rho_k} \frac{1}{z_k - z_{k-1}} \quad (5.174)$$

$$f_k = \rho_k^w K_{m_k} \frac{1}{z_{k+1}^\phi - z_k^\phi} \quad (5.175)$$

を定義することができる。 K_{h_k} についても同じ f_k を用いて適宜読み替えればよい。すると、

$k = 1$ について、

$$\frac{u_1^n - u_1^{n-1}}{\Delta t} = d_1 [f_1(u_2^N - u_1^N) - C_w u_1^N] \quad (5.176)$$

$$\frac{\phi_1^n - \phi_1^{n-1}}{\Delta t} = d_1 [f_1(\phi_2^N - \phi_1^N) - C_\phi(\phi_1^N - \phi_{sfc}^N)] \quad (5.177)$$

$k \geq 2$ について、

$$\frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\Delta t} = d_k [f_k(u_{k+1}^N - u_k^N) - f_{k-1}(u_k^N - u_{k-1}^N)] \quad (5.178)$$

$$\frac{\phi_k^n - \phi_k^{n-1}}{\Delta t} = d_k [f_k(\phi_{k+1}^N - \phi_k^N) - f_{k-1}(\phi_k^N - \phi_{k-1}^N)] \quad (5.179)$$

$k = m - 1$ について、

$$\frac{u_{m-1}^n - u_{m-1}^{n-1}}{\Delta t} = d_{m-1} [f_{m-1}(u_m^{n-1} - u_{m-1}^N) - f_{m-2}(u_{m-1}^N - u_{m-2}^N)] \quad (5.180)$$

$$\frac{\phi_{m-1}^n - \phi_{m-1}^{n-1}}{\Delta t} = d_{m-1} [f_{m-1}(\phi_m^{n-1} - \phi_{m-1}^N) - f_{m-2}(\phi_{m-1}^N - \phi_{m-2}^N)] \quad (5.181)$$

となる。ここで、 $k = m - 1$ のときの u_m^{n-1} と ϕ_m^{n-1} は境界条件として与えられるので、このプロセスでは不変である。これらについて、 $N = n - 1$ のときは陽解法で解いて時間変化率を、 $N = n$ のときは陰解法で解いて積分値を得る。

さて、陰解法を用いる場合には、連立方程式を解かなければならない。そこで、

$$a_k = -d_k f_{k-1} \Delta t \quad (5.182)$$

$$b_k = -d_k f_k \Delta t \quad (5.183)$$

とおくと、離散化方程式は、全ての変数を ψ で代表して、

$$\begin{aligned} \psi_1^n &= \psi_1^{n-1} + d_1 C_\psi \Delta t (\psi_{sf_c}^n - \psi_1^n) + b_1 (\psi_1^n - \psi_2^n) \\ \psi_2^n &= \psi_2^{n-1} + a_2 (\psi_2^n - \psi_1^n) + b_2 (\psi_2^n - \psi_3^n) \\ &\dots\dots\dots \\ \psi_k^n &= \psi_k^{n-1} + a_k (\psi_k^n - \psi_{k-1}^n) + b_k (\psi_k^n - \psi_{k+1}^n) \\ &\dots\dots\dots \\ \psi_{m-1}^n &= \psi_{m-1}^{n-1} + a_{m-1} (\psi_{m-1}^n - \psi_{m-2}^n) + b_{m-1} (\psi_{m-1}^n - \psi_m^n) \end{aligned} \quad (5.184)$$

ように書き改められる。この連立方程式は、行列を用いて、

$$\begin{pmatrix} \psi_1^n \\ \psi_2^n \\ \vdots \\ \psi_k^n \\ \vdots \\ \psi_{m-1}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^{n-1} + d_1 C_\psi \psi_{sf_c}^n \Delta t \\ \psi_2^{n-1} \\ \vdots \\ \psi_k^{n-1} \\ \vdots \\ \psi_{m-1}^{n-1} - b_{m-1} \psi_m^n \end{pmatrix} \quad (5.185)$$

$$+ \begin{pmatrix} b'_1 & -b_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -a_2 & a_2 + b_2 & -b_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -a_k & a_k + b_k & -b_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{m-1} & a_{m-1} + b_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1^n \\ \psi_2^n \\ \vdots \\ \psi_k^n \\ \vdots \\ \psi_{m-1}^n \end{pmatrix}$$

と表わすことができ、さらに簡単に、

$$\Psi^n = \mathbf{F} + \mathbf{A}\Psi^n \quad (5.186)$$

と書ける。なお、ここで、

$$b'_1 = b_1 - d_1 C_\psi \Delta t \quad (5.187)$$

である。結局、 $(m-1) \times (m-1)$ の単位行列 I を用いて Ψ^n の項を移行すれば、

$$(I - A)\Psi^n = \mathbf{F} \quad (5.188)$$

となり、これはガウスの消去法で簡単に解くことができる（具体的な解法の説明は、節 6.1.3 にある）。

5.2.5 地温

地面温度は、 m 層のモデルを用いて計算される。まず、図 5.3 に、地温の計算の模式図を示す。

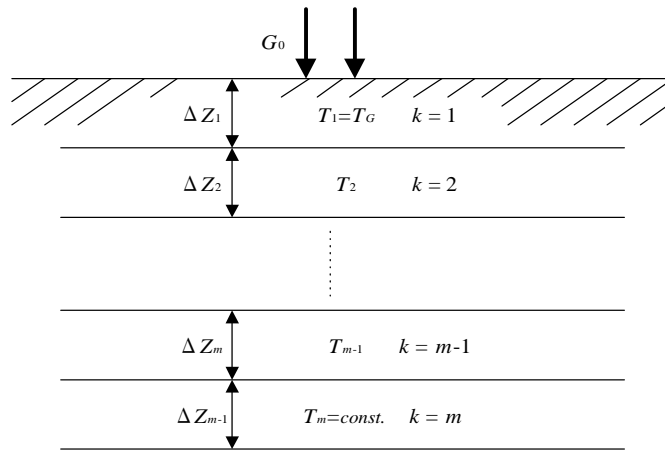


図 5.3. 地温の計算に用いる地中の設定。

次に、この m 層のモデルの地温の時間発展方程式系は、以下のとおりである。

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial t} &= \frac{G_0}{\rho_G C_G \Delta Z_1} + \frac{2\nu_G}{\Delta Z_1(\Delta Z_2 + \Delta Z_1)}(T_2 - T_1) \\ \frac{\partial T_2}{\partial t} &= -\frac{2\nu_G}{\Delta Z_2(\Delta Z_2 + \Delta Z_1)}(T_2 - T_1) + \frac{2\nu_G}{\Delta Z_2(\Delta Z_3 + \Delta Z_2)}(T_3 - T_2) \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{\partial T_k}{\partial t} &= -\frac{2\nu_G(T_k - T_{k-1})}{\Delta Z_k(\Delta Z_k + \Delta Z_{k-1})} + \frac{2\nu_G(T_{k+1} - T_k)}{\Delta Z_k(\Delta Z_{k+1} + \Delta Z_k)} \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{\partial T_{m-1}}{\partial t} &= -\frac{2\nu_G(T_{m-1} - T_{m-2})}{\Delta Z_{m-1}(\Delta Z_{m-1} + \Delta Z_{m-2})} + \frac{2\nu_G(T_m - T_{m-1})}{\Delta Z_{m-1}(\Delta Z_m + \Delta Z_{m-1})} \end{aligned} \quad (5.189)$$

なお、第 m 層の温度 T_m は計算期間中は一定とする。また、単位体積当たり地面の熱容量 $\rho_G C_G$ と熱拡散係数 ν_G は、

$$\rho_G C_G = 2.3 \times 10^6 \quad [\text{Jm}^{-3}\text{K}^{-1}] \quad (5.190)$$

$$\nu_G = 7.0 \times 10^{-7} \quad [\text{m}^2\text{s}^{-1}] \quad (5.191)$$

のように与えられる。

さて、(5.189) において、地中第1層目 ($k=1$) に現れる G_0 は地面に向かう熱フラックスで、正味放射 R_{net} 、顕熱 H_S 、潜熱 ${}_lE$ の総和、

$$G_0 = R_{net} - H_S - {}_lE \quad (5.192)$$

であり、それぞれ、

$$R_{net} = RS^\downarrow + L^\downarrow - L^\uparrow \quad (5.193)$$

$$H_S = -C_p C_\theta (T_a - T_G) \quad (5.194)$$

$${}_lE = -\mathcal{L}_v C_{qv} \beta [q_{va} - q_{vs}(T_G)] \quad (5.195)$$

のように与えられる。ここで、正味放射 R_{net} の最後の項は正味の上向長波長放射で、 $T_1 = T_G$ であり、

$$L^\uparrow = \varepsilon_G \sigma T_G^4 \quad (5.196)$$

と与えられる。また、潜熱 ${}_lE$ の式に現れる β は蒸発散係数で積分期間中一定とする。このように、放射過程は地表面の熱バランスの計算のみに用いられる。

地面温度の時間積分には陰解法 (implicit scheme) が用いられる。地温の時間発展方程式 (5.189) を離散化するために、まず、

$k=1 \sim m-1$ について、

$$a_1 = 0 \quad (5.197)$$

$$a_k = -\Delta t \frac{2\nu_G}{\Delta z_k (\Delta z_k + \Delta z_{k-1})} \quad (5.198)$$

$$b_k = -\Delta t \frac{2\nu_G}{\Delta z_k (\Delta z_{k+1} + \Delta z_k)} \quad (5.199)$$

とする。すると、(5.189) は、次のように離散化される。

$$\begin{aligned}
 T_1^n &= T_1^{n-1} + \frac{\Delta t G_0}{\rho_G C_G \Delta Z_1} + b_1(T_1^n - T_2^n) \\
 T_2^n &= T_2^{n-1} + a_2(T_2^n - T_1^n) + b_2(T_2^n - T_3^n) \\
 &\dots\dots\dots \\
 T_k^n &= T_k^{n-1} + a_k(T_k^n - T_{k-1}^n) + b_k(T_k^n - T_{k+1}^n) \\
 &\dots\dots\dots \\
 T_{m-1}^n &= T_{m-1}^{n-1} + a_{m-1}(T_{m-1}^n - T_{m-2}^n) + b_{m-1}(T_{m-1}^n - T_m^n)
 \end{aligned} \tag{5.200}$$

この連立方程式は、行列を用いて、

$$\begin{pmatrix} T_1^n \\ T_2^n \\ \vdots \\ T_k^n \\ \vdots \\ T_{m-1}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^{n-1} + \frac{\Delta t G_0}{\rho_G C_G \Delta Z_1} \\ T_2^{n-1} \\ \vdots \\ T_k^{n-1} \\ \vdots \\ T_{m-1}^{n-1} - b_{m-1} T_m^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & -b_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -a_2 & a_2 + b_2 & -b_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -a_k & a_k + b_k & -b_k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -a_{m-1} & a_{m-1} + b_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^n \\ T_2^n \\ \vdots \\ T_k^n \\ \vdots \\ T_{m-1}^n \end{pmatrix} \tag{5.201}$$

と表わすことができるので、地表面フラックスの鉛直拡散方程式の場合と全く同様にして、時刻 n の全ての層の地温が求められる。