第3章

サブグリッドスケールの拡散

数値モデルは、連続体である大気を離散的な格子点の値として表現するものである。しかし、実際の大気中にはその格子間隔より小さなスケールの運動が必ず存在する。これはその間隔をいかに小さくしても存在するもので、サブグリッドスケールの運動とよばれ、一般には拡散として作用する。また、実際の現象としては乱流に対応するもので、「乱流拡散」とよばれることもある。

格子間隔を細かくとっても表現できないのであれば、理論的にサブグリッドスケールの運動の時間発展方程式を導くことが考えられる。例えば、速度を平均量とそれからの偏差に分ければよい。このとき、平均量の方程式には未知量としてレイノルズ応力とよばれる偏差の 2 重相関が現れるので、それらの時間発展を与える式を考える。しかし、今度はそれらの中に 3 重相関が現れてしまう。同様の操作を繰り返してもさらに未知量が含まれ、方程式系は閉じない。これは乱流の非線形性によるもので、Kellar and Friedmann (1924) によって初めて認識されたこの問題を「クロージャー問題」という。

この困難から抜け出す方法の一つとしては、有限の数の方程式を用いて、残りの未知数を既知の量で表す方法がある。これは「クロージャー仮定」と呼ばれ、予報される相関の次数により、1 次のクロージャー、2 次のクロージャー、$\cdots$ のように呼ばれる。これらに対応して、あるモーメントの方程式系の一部のみをクロージャー仮定として用いる方法もある。こうして、サブグリッドスケールの運動の表現は 2 重相関の扱いに関して言えば、2 つに大別される。

- 2 重相関を直接扱い、その時間発展方程式に現れる未知数をモデル化する。
- 2 重相関を渦粘性の概念のもとに平均速度および乱流運動エネルギーと散逸率等の乱流を特徴付けるスカラー量を用いて表現し、これらについての時間発展方程式を別にモデル化する。

本章では、これら 2 つの方法によるサブグリッドスケールの運動の定式化について述べる。なお、ここに現れる変数は、SI 単位系である。他の単位系として読み替えてもほとんど支障ないが、数字で表わされている係数が変わる。

3.1 乱流輸送のパラメタリゼーション

大気中には様々なスケールの運動があるが、そのうちの数値モデルなどの格子点で表現できる運動を格子点スケールの平均運動（grid-scale motion）または平均運動（mean motion)、格子点以下のスケールの運動を乱流運動（subgrid-scale motion, eddy motion）という。

これらを分離するために、速度や温度、水蒸気混合比といった物理量 A を、次のように、格子点で表現できる平均量とそれからの偏差量に分ける。

$$A = \bar{A} + A'' \tag{3.1}$$

ここで、$\overline{}$ は平均量、$''$ をつけた量は平均量からのずれ、偏差量である。

物理量の平均には様々な方法があるが、ここでは詳細には触れない。ちなみに、偏差量の平均と 2 つの物理量の積の平均について、

$$\overline{A''} = 0 \tag{3.2}$$

$$\overline{AB} = \bar{A}\bar{B} + \overline{A''B''} \tag{3.3}$$

である。すなわち積の量を平均しても個々の平均の積には必ずしもならず、上式の第 2 項が現れる。これを運動方程式の x 成分に適用する。ここでは簡単のため非圧縮流体 ($\rho = const$) を考えると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - f\bar{v} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}\\ -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x}\rho\overline{u''u''} + \frac{\partial}{\partial y}\rho\overline{u''v''} + \frac{\partial}{\partial z}\rho\overline{u''w''}\right) + \nu\nabla^2\bar{u}\end{aligned} \tag{3.4}$$

のように、平均量とそれからのずれによって表わすことができる。この式に現れる $-\rho\overline{u''u''}, -\rho\overline{u''v''}, -\rho\overline{u''w''}$ の項は、乱流による応力を表しており、渦動応力（eddy stress）あるいはレイノルズ応力（Reynolds stress）と呼ぶ。これらは運送量の輸送と考えることができ、渦により運動量が輸送されることが応力となっている。

同様に、温位や混合比などについても、

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial x}\overline{u''\theta''} - \frac{\partial}{\partial y}\overline{v''\theta''} - \frac{\partial}{\partial z}\overline{w''\theta''} \tag{3.5}$$

と表わされる。

これらのプライムの付いた量は格子点で表現できないので、モデルで扱うためにはこれらの量を格子点の量で（平均の量で）表現しなければ、これらの効果すなわち格子点以下の渦運動による輸送の効果を反映することができない。このようなプライムのついた渦による偏差を格子点量で如何に表現するのかということが、乱流のパラメタリゼーションの問題である。なお、ここに現れる $\overline{}$ のついた量は、第 2 章などに現れるものと定義が異なることに注意されたい。

3.2 渦粘性モデル

3.2.1 拡散項の定式化

本節では、節 2.2.3 で述べた地形に沿う座標系での基本方程式において、運動方程式 (2.69)〜(2.71)、温位の式 (2.78)、水蒸気と水物質の混合比の式 (2.80)、および、水物質の数密度の式 (2.81) に現れる拡散項（乱流混合の項）$G^{\frac{1}{2}}\mathrm{Turb}.\phi$ の定式化を行う。

さて、運動方程式中の拡散項は、応力テンソル τ_{ij} を用いて次のように表現される。

$$
\begin{aligned}
G^{\frac{1}{2}}\mathrm{Turb}.u &= G^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial\tau_{11}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{12}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{13}}{\partial z}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial\xi}\left(J_d\tau_{11}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(J_d\tau_{12}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\tau_{13}+J_{31}\tau_{11}+J_{32}\tau_{12}\right)
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

$$
\begin{aligned}
G^{\frac{1}{2}}\mathrm{Turb}.v &= G^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial\tau_{21}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{22}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{23}}{\partial z}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial\xi}\left(J_d\tau_{21}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(J_d\tau_{22}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\tau_{23}+J_{31}\tau_{21}+J_{32}\tau_{22}\right)
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

$$
\begin{aligned}
G^{\frac{1}{2}}\mathrm{Turb}.w &= G^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial\tau_{31}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{32}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{33}}{\partial z}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial\xi}\left(J_d\tau_{31}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(J_d\tau_{32}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\tau_{33}+J_{31}\tau_{31}+J_{32}\tau_{32}\right)
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

ここで、応力テンソル τ_{ij} は、せん断応力とレイノルズ応力からなる。レイノルズ応力は平均量からの変動成分からなるので、平均量を用いた形式に何らかのモデル化をする必要がある。そこで、せん断応力からの類推で、粘性係数を用いた勾配拡散の形式に表すことを考えると以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
&\tau_{11}=\bar{\rho}\nu_{\tau h}\left(S_{11}-\frac{2}{3}Div\right), &&\tau_{12}=\bar{\rho}\nu_{\tau h}S_{12}, &&\tau_{13}=\bar{\rho}\nu_{\tau v}S_{13},\\
&\tau_{21}=\bar{\rho}\nu_{\tau h}S_{12}, &&\tau_{22}=\bar{\rho}\nu_{\tau h}\left(S_{22}-\frac{2}{3}Div\right), &&\tau_{23}=\bar{\rho}\nu_{\tau v}S_{23},\\
&\tau_{31}=\bar{\rho}\nu_{\tau h}S_{13}, &&\tau_{32}=\bar{\rho}\nu_{\tau h}S_{23}, &&\tau_{33}=\bar{\rho}\nu_{\tau v}\left(S_{33}-\frac{2}{3}Div\right)
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

ただし、$\nu_{\tau h}, \nu_{\tau v}$ は運動量に関する水平と鉛直方向の渦粘性係数であり、せん断応力に表れる分子粘性係数は渦粘性係数に比較して非常に小さいので無視する。また、S_{ij} は変形速度テンソルで、曲線座標系では、

$$
S_{11}=2\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2}{G^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(J_d u\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(J_{31}u\right)\right]
\tag{3.10}
$$

$$
S_{22}=2\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2}{G^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\left(J_d v\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(J_{32}v\right)\right]
\tag{3.11}
$$

$$
S_{33}=2\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{2}{G^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial w}{\partial\zeta}
\tag{3.12}
$$

$$S_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{G^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (J_d u) + \frac{\partial}{\partial \xi} (J_d v) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (J_{32} u + J_{31} v) \right] \tag{3.13}$$

$$S_{13} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{G^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (J_d w) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (u + J_{31} w) \right] \tag{3.14}$$

$$S_{23} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{G^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (J_d w) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (v + J_{32} w) \right] \tag{3.15}$$

のように、Div は発散であり、次のように与えられる。

$$Div = \frac{1}{G^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(G^{\frac{1}{2}} u \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(G^{\frac{1}{2}} v \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(G^{\frac{1}{2}} W \right) \right] \tag{3.16}$$

温位、水蒸気と水物質の混合比、および、水物質の数密度の拡散項については、それらの変数を ϕ で代表して、

$$\begin{aligned} G^{\frac{1}{2}} \mathrm{Turb}.\phi &= G^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial H_{\phi 1}}{\partial x} + \frac{\partial H_{\phi 2}}{\partial y} + \frac{\partial H_{\phi 3}}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} (J_d H_{\phi 1}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (J_d H_{\phi 2}) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (H_{\phi 3} + J_{31} H_{\phi 1} + J_{32} H_{\phi 2}) \end{aligned} \tag{3.17}$$

のように定式化する。ここで、$H_{\phi 1}, H_{\phi 2}$ は x, y 方向の、$H_{\phi 3}$ は z 方向の、上式に該当するスカラー量 ϕ の分子拡散と乱流（サブグリッドスケールの）フラックスで、速度の場合と同様に勾配拡散の形式で、

$$H_{\phi 1} = \bar{\rho} \nu_{Hh} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \bar{\rho} \nu_{Hh} \frac{1}{G^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (J_d \phi) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (J_{31} \phi) \right] \tag{3.18}$$

$$H_{\phi 2} = \bar{\rho} \nu_{Hh} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \bar{\rho} \nu_{Hh} \frac{1}{G^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (J_d \phi) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (J_{32} \phi) \right] \tag{3.19}$$

$$H_{\phi 3} = \bar{\rho} \nu_{Hv} \frac{\partial \phi}{\partial z} = \bar{\rho} \nu_{Hv} \frac{1}{G^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \tag{3.20}$$

のように与えられる。ただし、ν_{Hh}, ν_{Hv} はスカラー量に関する水平と鉛直方向の渦拡散係数で、分子拡散係数は小さいので無視する。

このように、レイノルズ応力を渦粘性係数を用いた形式にモデル化し、これらの式中に現れた渦粘性係数 $\nu_{\tau h}, \nu_{\tau v}$ と渦拡散係数ν_{Hh}, ν_{Hv} を評価する方法を渦粘性モデルという。

以下の節では、***CReSS*** に実装されている次の 2 つの渦粘性モデルを説明する。

- スマゴリンスキーの 1 次のクロージャー
- 乱流運動エネルギーを用いた 1.5 次のクロージャー

3.2.2 スマゴリンスキーの 1 次のクロージャー

Smagorinsky (1963), Lilly (1962) に基づいて、次のように渦粘性係数を与える。まず鉛直と水平方向に等方的である場合を考え、$\nu_{\tau h} = \nu_{\tau v} = \nu_\tau$ として、

$$\nu_\tau = \begin{cases} (C_S\Delta)^2 \left(Def^2 - \dfrac{N^2}{Pr} \right), & \nu_\tau > 0 \\ 0, & \nu_\tau \leq 0 \end{cases} \tag{3.21}$$

のように定式化する。ここで、C_S はスマゴリンスキー定数で、Deardorff (1972a) に従い、$C_S = 0.21$ とする。Δ は数値モデルの平均の格子間隔、

$$\Delta = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{\frac{1}{3}} \tag{3.22}$$

である。また、Def は変形の大きさで、

$$Def^2 = \frac{1}{2}\left(S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2\right) + S_{12}^2 + S_{13}^2 + S_{23}^2 - \frac{2}{3}Div^2 \tag{3.23}$$

のように、N はブラント・バイサラ振動数で、

$$N^2 = \begin{cases} \dfrac{g}{G^{\frac{1}{2}}} \dfrac{\partial \ln\theta}{\partial \zeta}, & q_v < q_{vsw} \\ \dfrac{g}{G^{\frac{1}{2}}} \left[\dfrac{1 + \mathcal{L}_v q_{vsw}/R_d T}{1 + \mathcal{L}_v^2 q_{vsw}/C_p R_v T^2} \left(\dfrac{\partial \ln\theta}{\partial \zeta} + \dfrac{\mathcal{L}_v}{C_p T} \dfrac{\partial q_{vsw}}{\partial \zeta} \right) - \dfrac{\partial q_w}{\partial \zeta} \right], & q_v \geq q_{vsw} \end{cases} \tag{3.24}$$

のように、Pr は乱流プラントル数で、

$$Pr = \nu_\tau / \nu_H \tag{3.25}$$

$$\nu_H = \nu_{Hh} = \nu_{Hv} \tag{3.26}$$

のように与えられ、これを用いてスカラー量 ϕ に関する渦拡散係数を求めればよい。ここで、g は重力加速度、T は温度、R_d, R_v はそれぞれ乾燥空気と水蒸気の気体定数、C_p は乾燥空気の定圧比熱、q_w は水蒸気・雲水・雨水の混合比の和である。また、水飽和混合比 q_{vsw} は Tetens の式を用いて、

$$q_{vsw} = \epsilon \frac{610.78}{p} \exp\left(17.269 \frac{T - 273.16}{T - 35.86} \right) \tag{3.27}$$

のように、水の蒸発の潜熱 $\mathcal{L}_v$ は、

$$\mathcal{L}_v = 2.50078 \times 10^6 \left(\frac{273.16}{T}\right)^{\left(0.167+3.67\times10^{-4}T\right)} \tag{3.28}$$

のように与えられる。ϵ は水蒸気の分子量と乾燥空気の分子量の比である。

次に、鉛直と水平に非等方である場合は、

$$\nu_{\tau h} = \begin{cases} (C_S\Delta_h)^2\left(Def^2 - \dfrac{N^2}{Pr}\right), & \nu_{\tau h} > 0 \\ 0, & \nu_{\tau h} \le 0 \end{cases} \tag{3.29}$$

$$\nu_{\tau v} = \begin{cases} (C_S\Delta_v)^2\left(Def^2 - \dfrac{N^2}{Pr}\right), & \nu_{\tau v} > 0 \\ 0, & \nu_{\tau v} \le 0 \end{cases} \tag{3.30}$$

のようにして各方向の渦粘性係数を与える。ここで、

$$\Delta_h = (\Delta x\Delta y)^{\frac{1}{2}} \tag{3.31}$$

$$\Delta_v = \Delta z \tag{3.32}$$

であり、スカラー量 ϕ に関する各方向の渦拡散係数 ν_{Hh}, ν_{Hv} は、同じ乱流プラントル数 Pr を用いて、次のように求めればよい。

$$Pr = \nu_{\tau h}/\,\nu_{Hh} = \nu_{\tau v}/\,\nu_{Hv} \tag{3.33}$$

3.2.3 乱流運動エネルギーを用いた 1.5 次のクロージャー

1.5 次のクロージャーでは、乱流運動エネルギーについての時間発展方程式を用いる。この乱流運動エネルギーは、各速度成分について、平均流からの偏差に $''$ を付して、

$$E = \frac{1}{2}\left(\overline{u''^2 + v''^2 + w''^2}\right) \tag{3.34}$$

と表され、その時間発展方程式は、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho^* E}{\partial t} = &-\left(u^*\frac{\partial E}{\partial\xi} + v^*\frac{\partial E}{\partial\eta} + W^*\frac{\partial E}{\partial\zeta}\right) + \mathrm{Buoy}.E + \rho^*\left(\frac{1}{2}\nu_E Def^2 - \frac{2}{3}EDiv\right) - \rho^*\frac{C_e}{l_h}E^{\frac{3}{2}} \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial\xi}(J_d H_{E1}) + \frac{\partial}{\partial\eta}(J_d H_{E2}) + \frac{\partial}{\partial\zeta}(H_{E3} + J_{31}H_{E1} + J_{32}H_{E2})\right] \end{aligned} \tag{3.35}$$

まず、式 (3.35) の右辺第 2 項に現れる Buoy.E は、位置エネルギーと運動エネルギーの変換項で、

$$\text{Buoy}.E = \begin{cases} -g\bar{\rho}\nu_{Hv}\left(A\dfrac{\partial\theta_e}{\partial\zeta} - \dfrac{\partial q_{all}}{\partial\zeta}\right), & q_v \geq q_{vsw} \;\; or \;\; q_c + q_i > 0 \\ \\ -g\bar{\rho}\nu_{Hv}\left(\dfrac{1}{\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial\zeta} + 0.61\dfrac{\partial q_v}{\partial\zeta}\right), & q_v < q_{vsw} \;\; or \;\; q_c + q_i = 0 \end{cases} \tag{3.36}$$

のように与えられる。ただし A は、

$$A = \frac{1}{\theta}\frac{1 + 1.61\epsilon\mathcal{L}_v q_v / R_d T}{1 + \epsilon\mathcal{L}_v^2 q_v / C_p R_d T^2} \tag{3.37}$$

であり、g は重力加速度、T は温度、ϵ は水蒸気の分子量と乾燥空気の分子量の比、q_{all} は水蒸気・雲水・雲氷の混合比の和、θ_e は相当温位、C_p, R_d はそれぞれ乾燥空気の定圧比熱と気体定数、$\mathcal{L}_v$ は水の蒸発の潜熱である。

次に、右辺第 3 項の $Div,\ Def$ はそれぞれ、節 3.2.1、3.2.2 で示したものと同じであり、

$$Div = \frac{1}{G^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(G^{\frac{1}{2}}u\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(G^{\frac{1}{2}}v\right) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(G^{\frac{1}{2}}W\right)\right] \tag{3.38}$$

$$Def^2 = \frac{1}{2}\left(S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2\right) + S_{12}^2 + S_{13}^2 + S_{23}^2 - \frac{2}{3}Div^2 \tag{3.39}$$

のように、また、右辺第 4 項の散逸項の係数 C_e は、

$$C_e = \begin{cases} 3.9, & \text{最下層} \\ 0.93, & \text{それ以外} \end{cases} \tag{3.40}$$

と与えられ、右辺最後の項の乱流運動エネルギーのフラックスは、

$$H_{E1} = \bar{\rho}\nu_E\frac{\partial E}{\partial x} = \bar{\rho}\nu_E\frac{1}{G^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(J_d E\right) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(J_{31}E\right)\right] \tag{3.41}$$

$$H_{E2} = \bar{\rho}\nu_E\frac{\partial E}{\partial y} = \bar{\rho}\nu_E\frac{1}{G^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\left(J_d E\right) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(J_{32}E\right)\right] \tag{3.42}$$

$$H_{E3} = \bar{\rho}\nu_E\frac{\partial E}{\partial z} = \bar{\rho}\nu_E\frac{1}{G^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial E}{\partial\zeta} \tag{3.43}$$

のように表される。ここで、ν_E は乱流運動エネルギーに対する渦粘性係数である。

結局、渦粘性係数 $\nu_{\tau h}, \nu_{\tau v}$ は乱流運動エネルギー E の関数として、

$$\nu_{\tau h} = 0.1E^{\frac{1}{2}} l_h \tag{3.44}$$

$$\nu_{\tau v} = 0.1E^{\frac{1}{2}} l_v \tag{3.45}$$

のように与えられる。ここで、l_h, l_v はそれぞれ水平・鉛直方向の混合長スケールで、格子間隔が鉛直と水平でほぼ同じ場合には、

$$l = l_h = l_v = \begin{cases} \Delta s, & \text{不安定または中立の場合} \\ min\left(\Delta s, l_s\right), & \text{安定な場合} \end{cases} \tag{3.46}$$

のように与えられる。ただし、

$$\Delta s = \Delta s_h = \Delta s_v = \left(\Delta x \Delta y \Delta z\right)^{\frac{1}{3}} \tag{3.47}$$

$$l_s = 0.76E^{\frac{1}{2}} \left| \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right|^{-\frac{1}{2}} \tag{3.48}$$

である。また、格子間隔が鉛直と水平で大きく異なる場合には、

$$l_h = \Delta s_h \tag{3.49}$$

$$l_v = \begin{cases} \Delta s_v, & \text{不安定または中立の場合} \\ min\left(\Delta s_v, l_s\right), & \text{安定な場合} \end{cases} \tag{3.50}$$

のように与えられる。ただし、

$$\Delta s_h = \left(\Delta x \Delta y\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \Delta s_v = \Delta z \tag{3.51}$$

であり、l_s は式 (3.48) で与えられたものと同じである。

最終的に、渦粘性係数 $\nu_{\tau h}, \nu_{\tau v}$ は乱流運動エネルギー E の関数として、

$$\nu_{\tau h} = max\left(0.1E^{\frac{1}{2}} l_h, \alpha \Delta s_h^2\right) \tag{3.52}$$

$$\nu_{\tau v} = max\left(0.1E^{\frac{1}{2}} l_v, \alpha \Delta s_v^2\right) \tag{3.53}$$

のように与えられる。ここで α は小さい数で、$\alpha = 10^{-6}$ などである。また、スカラー量 ϕ に対する渦拡散係数 ν_{Hv}, ν_{Hh} と乱流運動エネルギー E に対する渦粘性係数 ν_E は、

格子間隔が水平と鉛直方向でほぼ同じ場合、

$$\frac{\nu_{\tau h}}{\nu_{Hh}} = \frac{\nu_{\tau v}}{\nu_{Hv}} = \frac{1}{1 + 2l/\Delta s} \ \ (\ = Pr \ ) \tag{3.54}$$

$$\nu_E = 2\nu_{\tau h} = 2\nu_{\tau v} \tag{3.55}$$

格子間隔が水平と鉛直方向で大きく異なる場合、

$$\frac{\nu_{\tau h}}{\nu_{Hh}} = \frac{1}{1 + 2l_h/\Delta s_h} = \frac{1}{3} \tag{3.56}$$

$$\frac{\nu_{\tau v}}{\nu_{Hv}} = \frac{1}{1 + 2l_v/\Delta s_v} \ \ (\ = Pr \ ) \tag{3.57}$$

$$\nu_E = 2\nu_{\tau h} \tag{3.58}$$

のように求める。

3.2.4 地図投影座標系における拡散項の定式化

本節では、節 2.3 で述べた地図投影座標系における、運動方程式、温位の式、水蒸気と水物質の混合比の式、および、水物質の数密度の式に現れる拡散項（乱流混合の項）と乱流運動エネルギーの時間発展方程式の定式化を行う。

さて、運動方程式中の拡散項 (3.6)〜(3.8) は、地図投影座標系においては次のように表現される。

$$\begin{aligned} G^{\frac{1}{2}}\mathrm{Turb}.u &= G^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial z} \right) \\ &= m^2 \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{J_d \tau_{11}}{m} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{J_d \tau_{12}}{m} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\tau_{13} + J_{31}\tau_{11} + J_{32}\tau_{12} \right) \end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned} G^{\frac{1}{2}}\mathrm{Turb}.v &= G^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial z} \right) \\ &= m^2 \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{J_d \tau_{21}}{m} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{J_d \tau_{22}}{m} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\tau_{23} + J_{31}\tau_{21} + J_{32}\tau_{22} \right) \end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned} G^{\frac{1}{2}}\mathrm{Turb}.w &= G^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial \tau_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial z} \right) \\ &= m^2 \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{J_d \tau_{31}}{m} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{J_d \tau_{32}}{m} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\tau_{33} + J_{31}\tau_{31} + J_{32}\tau_{32} \right) \end{aligned} \tag{3.61}$$

ここで、応力テンソル τ_{ij} の表記は、式 (3.9) と同様であるが、変形速度テンソル S_{ij} については、

$$S_{11} = 2m\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2m}{G^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}(J_d u) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(J_{31} u)\right] \tag{3.62}$$

$$S_{22} = 2m\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2m}{G^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{\partial}{\partial \eta}(J_d v) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(J_{32} v)\right] \tag{3.63}$$

$$S_{33} = 2\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{2}{G^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial w}{\partial \zeta} \tag{3.64}$$

$$S_{12} = m\frac{\partial u}{\partial y} + m\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{m}{G^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{\partial}{\partial \eta}(J_d u) + \frac{\partial}{\partial \xi}(J_d v) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(J_{32} u + J_{31} v)\right] \tag{3.65}$$

$$S_{13} = \frac{\partial u}{\partial z} + m\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{m}{G^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}(J_d w) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(J_{31} w)\right] + \frac{1}{G^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial u}{\partial \zeta} \tag{3.66}$$

$$S_{23} = \frac{\partial v}{\partial z} + m\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{m}{G^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{\partial}{\partial \eta}(J_d w) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(J_{32} w)\right] + \frac{1}{G^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial v}{\partial \zeta} \tag{3.67}$$

のように、発散 Div については、

$$Div = \frac{1}{G^{\frac{1}{2}}}\left[m^2\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{G^{\frac{1}{2}} u}{m} + \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{G^{\frac{1}{2}} v}{m}\right) + \frac{\partial W}{\partial \zeta}\right] \tag{3.68}$$

のように変形される。

温位、水蒸気と水物質の混合比、および、水物質の数密度の拡散項 (3.17) については、

$$\begin{aligned} G^{\frac{1}{2}}\mathrm{Turb}.\phi &= G^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial H_{\phi 1}}{\partial x} + \frac{\partial H_{\phi 2}}{\partial y} + \frac{\partial H_{\phi 3}}{\partial z}\right) \\ &= m^2\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{J_d H_{\phi 1}}{m} + \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{J_d H_{\phi 2}}{m}\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(H_{\phi 3} + J_{31} H_{\phi 1} + J_{32} H_{\phi 2}) \end{aligned} \tag{3.69}$$

のように表現される。ここで、分子拡散と乱流フラックス $H_{\phi 1}, H_{\phi 2}, H_{\phi 3}$ は、

$$H_{\phi 1} = \bar{\rho}\nu_{Hh}\frac{\partial \phi}{\partial x} = \bar{\rho}\nu_{Hh}\frac{m}{G^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}(J_d \phi) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(J_{31}\phi)\right] \tag{3.70}$$

$$H_{\phi 2} = \bar{\rho}\nu_{Hh}\frac{\partial \phi}{\partial y} = \bar{\rho}\nu_{Hh}\frac{m}{G^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{\partial}{\partial \eta}(J_d \phi) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(J_{32}\phi)\right] \tag{3.71}$$

$$H_{\phi 3} = \bar{\rho}\nu_{Hh}\frac{\partial \phi}{\partial z} = \bar{\rho}\nu_{Hh}\frac{1}{G^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \tag{3.72}$$

のように与えられる。

次に、1.5 次のクロージャーでは、乱流運動エネルギーについての時間発展方程式を用いるので、それについても地図係数を導入したものに変更しなければならない。この変更も同様の方法で行なわれ、地形を含み地図係数を導入した乱流運動エネルギーの時間発展方程式は、次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho^* E}{\partial t} = &-\left(mu^*\frac{\partial E}{\partial \xi} + mv^*\frac{\partial E}{\partial \eta} + W^*\frac{\partial E}{\partial \zeta}\right) + \mathrm{Buoy}.E + \rho^*\left(\frac{1}{2}\nu_E Def^2 - \frac{2}{3}EDiv\right) - \rho^*\frac{C_e}{l_h}E^{\frac{3}{2}} \\ &+ \left[m^2\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{J_d H_{E1}}{m} + \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{J_d H_{E2}}{m}\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(H_{E3} + J_{31}H_{E1} + J_{32}H_{E2}\right)\right] \qquad (3.73)\end{aligned}$$

ここで、右辺最後の項の乱流運動エネルギーのフラックスは、

$$H_{E1} = \bar{\rho}\nu_E\frac{\partial E}{\partial x} = \bar{\rho}\nu_E\frac{m}{G^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(J_d E\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(J_{31}E\right)\right] \qquad (3.74)$$

$$H_{E2} = \bar{\rho}\nu_E\frac{\partial E}{\partial y} = \bar{\rho}\nu_E\frac{m}{G^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{\partial}{\partial \eta}\left(J_d E\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(J_{32}E\right)\right] \qquad (3.75)$$

$$H_{E3} = \bar{\rho}\nu_E\frac{\partial E}{\partial z} = \bar{\rho}\nu_E\frac{1}{G^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial E}{\partial \zeta} \qquad (3.76)$$

のように表される。